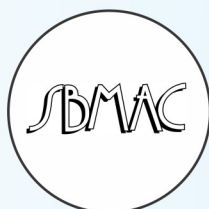


XIII ENCONTRO CIENTÍFICO DOS PÓS-GRADUANDOS DO IMECC

15 A 18 DE OUTUBRO DE 2018 | IMECC - UNICAMP



BOLETIM DIGITAL



 www.ime.unicamp.br/~encpos/

 encpos@ime.unicamp.br





Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



Sumário

1	Apresentação	4
2	Agradecimentos	5
3	Comissões	6
4	Homenagem	7
I	Minicurso	
5	Minicurso	9
5.1	Fundamentos de Redes Neurais Clássicas e Profundas	9
II	Conferências	
6	Palestras Plenárias	11
6.1	Modelos Espectrais de Turbulência	11
6.2	Matemática e Problemas Complexos	12
6.3	A Geometria dos Tensores	13
6.4	Famílias de Schreier e Espaços de Banach	14

6.5	Uma Abordagem Integrada para Análise dos Efeitos da Poluição na Saúde	15
6.6	Métodos Estatísticos na Produção de Informações para o Progresso e Bem Estar da Sociedade	16
6.7	Inteligência Artificial: o que fizemos por ela e o que ela fará por nós	17
6.8	Você está preparado para ser Cientista de Dados?	18
6.9	The Topological Entropy of Endomorphisms of Lie Groups	19
6.10	Determinação de Parâmetros para a Dinâmica do HIV	20
6.11	Mantendo a coesão e coerência em redações científicas usando mapas conceituais	21
6.12	Saúde mental na pós graduação: aspectos emocionais e acadêmicos na atualidade	22

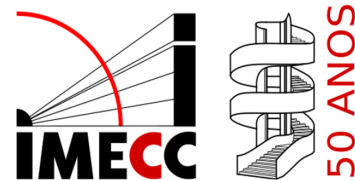
7	Palestras de Divulgação	23
7.1	Qual é o papel do cientista de dados no Mercado de Trabalho?	23
7.2	Uso de Tecnologia na geração de confiança. Um case ClearSale!	24
7.3	Preciso falar inglês. E agora?	25

III **Apresentações de Alunos**

8	Apresentações Oraís	27
9	Pôsteres	66



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



1. Apresentação

É com imensa satisfação que o Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), promove o XIII Encontro Científico dos Pós-Graduandos do IMECC, um evento de nível científico que tem como maior objetivo propiciar aos alunos de pós-graduação do instituto e de outras instituições uma oportunidade para divulgar suas pesquisas.

O evento deste ano contará com 12 palestras plenárias, um minicurso, 20 apresentações orais de alunos, além de sessão com 11 pôsteres. Teremos também palestras dos parceiros ClearSale, SAS Software Brasil e UPTIME - Escola de idiomas. Além disso, serão realizadas homenagens à funcionária Josefa Mendes do Nascimento, a Dona Zefa, da Seção de Apoio Operacional, e a recém-doutora Tatiana Rocha de Souza (*in memoriam*), pelas contribuições dadas ao IMECC.

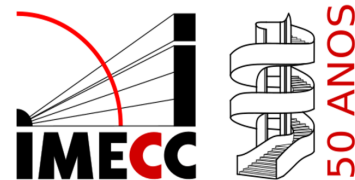
A Comissão Organizadora agradece a todos os participantes que prestigiarão o evento, e espera que o mesmo permaneça em suas próximas edições sendo uma oportunidade para a divulgação de trabalhos relevantes desenvolvidos por pesquisadores nacionais e estrangeiros do mais alto nível.

Realização





Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



2. Agradecimentos

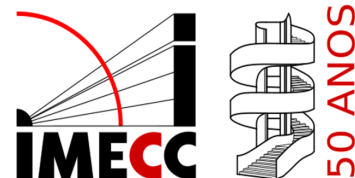
Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), à Associação dos Pós-graduandos do IMECC (APG-IMECC), à SAS Software Brasil, à ClearSale, à Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), ao Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CEPID - CeMEAI) e à UPTIME - Escola de idiomas pelo apoio financeiro ao evento.

À Cengage Learning, à Editora Blucher e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela doação dos livros que foram sorteados para os participantes.

E, em especial, a todos os participantes do XIII Encontro Científico dos Pós-Graduandos do IMECC, por prestigiar o evento.



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



3. Comissões

Comissão Organizadora

Prof. Dr. Christophe Frédéric Gallesco
Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas
Prof.^a Dra. Nancy Lopes Garcia
Prof. Dr. Joerg Schleicher

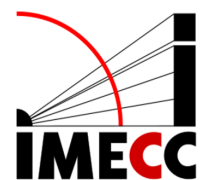
Ms. Fernanda Lang Schumacher
Ms. Lisbeth Corbacho Carazas
Ms. Miqueias de Melo Lobo
Ms. Nilmara de Jesus Biscaia Pinto
Ms. Pammela Ramos da Conceição
Ms. Raquel Ines Serna Diaz
Ms. Rodrigo Labiak
Ms. Thalita do Bem Mattos
Ms. Vinícius Francisco Wasques

Comissão Científica

Prof. Dr. Christophe Frédéric Gallesco
Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes
Prof. Dr. Eduardo Cardoso de Abreu
Prof. Dr. Filidor Edilson Vilca Labra
Profa. Dra. Gabriela Del Valle Planas
Profa. Dra. Hildete Prisco Pinheiro
Prof. Dr. Joerg Schleicher
Prof. Dr. Lucio Centrone
Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita
Prof.^a Dra. Sandra Augusta Santos



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



4. Homenagem

Josefa Mendes do Nascimento, conhecida por Dona Zefa, foi contratada pela Unicamp no ano de 1986, completando nesse ano 32 anos de serviço prestados. Ao longo da sua carreira Dona Zefa conquistou o carinho dos alunos de graduação e pós-graduação por principalmente proporcionar um momento de integração entre professores, estudantes e funcionários. Esse momento acontecia no chamado "café da Dona Zefa", que ocorria na copa do saguão do IMECC durante os intervalos de aula, no qual era fornecido café a preços simbólicos ao público presente. Dona Zefa sempre recepcionava a todos de braços abertos e sempre com um sorriso estampado em seu rosto. Todos os frequentadores lembram daqueles momentos com muito carinho.

Tatiana Rocha de Souza nasceu no ano de 1982, em Mossoró, no Rio Grande do Norte. Em 2011, já como professora da Universidade Estadual da Paraíba, descobriu um câncer colorretal com metástase hepática. Ao encerrar o primeiro tratamento, decidiu que queria ajudar de alguma forma o paciente oncológico e ingressou no curso de doutorado em matemática aplicada no IMECC. Durante seus estudos recebeu a notícia de que o câncer havia retornado. Em 18 de maio de 2018, concluiu sua tese de doutorado intitulada "Dinâmica tumoral e a noética". Sua tese, para além dos tratamentos padrão, incluiu também intervenções integrativas, como acupuntura e terapia craniossacral. Essa ideia veio de seu próprio tratamento, no qual sentiu uma significativa melhora em sua qualidade de vida. Devido ao seu grande trabalho e luta foi procurada por veículos na internet para dar entrevistas e foi convidada a ministrar palestras sobre o tema em universidades e eventos. Em pouco mais de um mês disponível no repositório da Unicamp, sua tese foi consultada quase 600 vezes. Em 20 de setembro recebemos a notícia de que ela havia nos deixado. Tatiana foi um exemplo que transformou um motivo de tristeza em uma forte forma de lutar. Que sua batalha seja uma fonte de inspiração para todos nós.

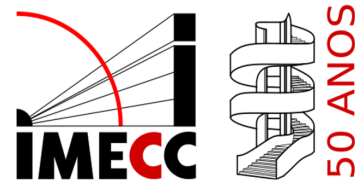


Minicurso

5	Minicurso	9
5.1	Fundamentos de Redes Neurais Clássicas e Profundas	



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



5. Minicurso

5.1 Fundamentos de Redes Neurais Clássicas e Profundas

Prof. Dr. Romis Ribeiro de Faissol Attux
FEEC-UNICAMP

Resumo

Neste minicurso, faremos uma apresentação introdutória das redes neurais artificiais, partindo de sua origem histórica e chegando à atual temática de aprendizado profundo (deep learning).



Conferências

6 Palestras Plenárias 11

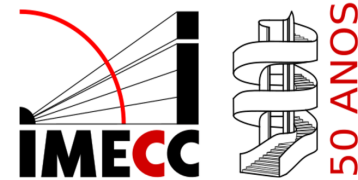
- 6.1 Modelos Espectrais de Turbulência
- 6.2 Matemática e Problemas Complexos
- 6.3 A Geometria dos Tensores
- 6.4 Famílias de Schreier e Espaços de Banach
- 6.5 Uma Abordagem Integrada para Análise dos Efeitos da Poluição na Saúde
- 6.6 Métodos Estatísticos na Produção de Informações para o Progresso e Bem Estar da Sociedade
- 6.7 Inteligência Artificial: o que fizemos por ela e o que ela fará por nós
- 6.8 Você está preparado para ser Cientista de Dados?
- 6.9 The Topological Entropy of Endomorphisms of Lie Groups
- 6.10 Determinação de Parâmetros para a Dinâmica do HIV
- 6.11 Mantendo a coesão e coerência em redações científicas usando mapas conceituais
- 6.12 Saúde mental na pós graduação: aspectos emocionais e acadêmicos na atualidade

7 Palestras de Divulgação 23

- 7.1 Qual é o papel do cientista de dados no Mercado de Trabalho?
- 7.2 Uso de Tecnologia na geração de confiança. Um case ClearSale!
- 7.3 Preciso falar inglês. E agora?



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



6. Palestras Plenárias

6.1 Modelos Espectrais de Turbulência

Prof^a. Dr^a. Ailin Ruiz de Zarate Fábregas
UFPR

Resumo

Os modelos da Mecânica dos Fluidos fornecem problemas muito importantes na área de Equações Diferenciais Parciais. O ponto de partida são as equações de Navier-Stokes, que governam o escoamento dos fluidos nos mais diversos contextos. A natureza não-linear dessas equações origina o fenômeno da turbulência e torna extremamente difícil a obtenção de soluções analíticas clássicas, exigindo outras formas de abordar o problema. Trata-se de uma área de pesquisa interdisciplinar, que envolve experimentação e interpretação física do problema, modelagem matemática, métodos de resolução analíticos, numéricos e estatísticos, e interpretação dos resultados. Nesta palestra vamos apresentar alguns aspectos dessa modelagem a partir da versão espectral das equações de Reynolds para as flutuações turbulentas, com ênfase no problema de fechamento no caso de homogeneidade estatística e anisotropia.

6.2 Matemática e Problemas Complexos

Prof. Dr Carlile Lavor
IMECC-UNICAMP

Resumo

Resolver problemas complexos do mundo real exige três habilidades principais: conhecimento matemático, disposição para dialogar com cientistas da área original do problema e desenvolvimento de métodos computacionais para resolver o modelo matemático associado. Tudo isso será ilustrado com um problema fundamental da indústria farmacêutica relacionado ao desenvolvimento de novos medicamentos.

6.3 A Geometria dos Tensores

Prof^a. Dr^a. Carolina Bhering de Araujo
IMPA

Resumo

Os tensores são objetos fundamentais em álgebra multi-linear, com importantes aplicações à complexidade de algoritmos, processamento de sinais, filogenética e estatística algébrica. Em aplicações, geralmente se busca decomposições minimais de tensores como combinação linear de tensores indecomponíveis. O número de parcelas em uma tal decomposição minimal é chamado o "posto" do tensor. Determinar o posto de um tensor é um problema que tem recebido muita atenção nos últimos anos e admite uma bela interpretação geométrica. Nesta palestra abordarei algumas aplicações da decomposição de tensores e interpretarei o problema desde o ponto de vista da geometria algébrica. Em particular, apresentarei resultados novos sobre postos de tensores, em colaboração com Alex Massarenti e Rick Rischte.

6.4 Famílias de Schreier e Espaços de Banach

Prof^a. Dr^a Christina Brech
IME-USP

Resumo

Falaremos sobre a relação entre as propriedades combinatórias de famílias de subconjuntos finitos em um conjunto de índices e espaços de Banach definidos a partir destas famílias. Mostraremos como a teoria de Ramsey é usada para provar propriedades estruturais nos espaços de Banach. Serão analisados os casos separável e não separável.

6.5 Uma Abordagem Integrada para Análise dos Efeitos da Poluição na Saúde

Prof. Dr. Dani Gamerman
UFRJ

Resumo

Existe um consenso na sociedade que a poluição produz efeitos nocivos à saúde da população. Entretanto, é longe de óbvio como fazer essa constatação de uma forma abrangente em larga escala e como quantificar esses possíveis efeitos. Esse tipo de estudo usualmente envolve medidas de morbidade (como número de internações) e de mortalidade (como número de mortes) para caracterizar a saúde e medições de níveis de poluentes para caracterizar a poluição. Essas medidas são feitas em uma série de locais no espaço como estações monitoradoras no caso de poluição e como medidas agregadas em regiões administrativas no caso de saúde. Além disso, existem vários poluentes que podem ser medidos bem como várias doenças. Questões que se interpõe são: como agregar as diferentes doenças, como agregar os diferentes poluentes, como agregar as diferentes regiões ou locais de medição ao longo da região de interesse. A literatura da área faz uma série de escolhas arbitrárias (como tomar médias das medições ou escolher apenas uma das medições) para poder contornar o dilema criado nesse problema e responder as perguntas acima. A modelagem estatística permite não ter de fazer essas escolhas arbitrárias e recompõe todas as medições em uma única estrutura integrada.

6.6 Métodos Estatísticos na Produção de Informações para o Progresso e Bem Estar da Sociedade

Prof^a. Dr^a. Denise Britz
ENCE-IBGE

Resumo

As estatísticas públicas são indispensáveis para uma sociedade democrática. Várias das informações utilizadas na gestão pública e no acompanhamento das metas mundiais de desenvolvimento dependem de métodos estatísticos para sua obtenção e análise. A necessidade de estatísticas públicas de boa qualidade, e a revolução ocorrida devido à evolução da sociedade da informação, resultam na constante modernização dos processos de produção. Nesta palestra, destaca-se a importância do contínuo desenvolvimento de novos métodos estatísticos na área de pesquisas quantitativas, bem como são apresentados exemplos de sua utilização. Adicionalmente, discute-se a incorporação dos potenciais avanços e vantagens do Big Data no ambiente das estatísticas oficiais, considerando os compromissos com a confiança pública e os protocolos de qualidade estabelecidos internacionalmente.

6.7 Inteligência Artificial: o que fizemos por ela e o que ela fará por nós

Prof. Dr. Fernando Von Zuben
FEEC-UNICAMP

Resumo

Esta palestra vai tratar da história da Inteligência Artificial (IA), com ênfase nos efeitos da Lei de Moore sobre as soluções de IA, seu estágio atual de desenvolvimento, com ênfase na tecnologia de relacionamento, e suas perspectivas futuras, abordando tendências e limites da IA.

6.8 Você está preparado para ser Cientista de Dados?

Prof. Dr. Francisco Louzada Neto
USP-São Carlos

Resumo

A frequente geração de dados tem promovido mudanças fundamentais em vários setores da economia e no consumo pessoal de bens e serviços. Estamos em uma nova era, cercados por dados de todos os lados. Enormes massas de dados resultantes de processos de coleta automática, instrumentação eletrônica, transações on-line e dados históricos coletados ao longo de muitos anos. O momento é do big, antes da mineração, da pesca, da dragagem, afinal são todos indicativos de grandes conjuntos de dados. Novos mercados de consumo e varejo emergem sob novas tecnologias e comportamentos. Neste novo mundo, a ordem de grandeza dos conjuntos de dados para a ciência estatística tem experimentado mudanças drásticas direcionadas por estratégias de análise adaptativas e o desenvolvimento de novas metodologias. As necessidades mais comuns são métodos de estimação sequencial, estrutura de segmentação adaptativa e múltiplas combinações de modelos, diretamente associadas a estratégias computacionais eficientes que proporcionam respostas em tempo real, à luz de dados contaminados e faltantes, variáveis não identicamente distribuídas, presença de não-estacionariedades, variáveis não- numéricas. Neste contexto, é iminente a necessidade de um novo tipo de profissional. Nesta apresentação discuto as oportunidades que este novo mundo de dados nos oferece, à luz do contraste entre a ultramodernidade dos mecanismos de captura de dados e as metodologias estatísticas usuais. Faça notar como podemos contribuir para a formação de um novo profissional que deve atuar eficazmente dentro deste novo mundo de dados.

6.9 The Topological Entropy of Endomorphisms of Lie Groups

Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão
UNB

Resumo

In this talk, we present our recent result about the determination of the topological entropy $h(\phi)$ of a continuous endomorphism ϕ of a Lie group G . This computation is a classical topic in ergodic theory which seemed to have long been solved. But, when G is noncompact, the well known Bowen's formula for the entropy $h_d(\phi)$ associated to a left invariant distance d just provides an upper bound to $h(\phi)$, which is characterized by the variational principle. We prove that $[h(\phi) = h(\phi|_{T(G_\phi)})]$ where G_ϕ is the maximal connected subgroup of G such that $\phi(G_\phi) = G_\phi$, and $T(G_\phi)$ is the maximal torus in the center of G_ϕ . This result shows that the computation of the topological entropy of a continuous endomorphism of a Lie group reduces to the classical formula for the topological entropy of a continuous endomorphism of a torus. Our approach explores the relation between null topological entropy and the nonexistence of Li-Yorke pairs and also relies strongly on the structure theory of Lie groups.

6.10 Determinação de Parâmetros para a Dinâmica do HIV

Prof^a. Dr^a. Rosana Sueli Da Motta Jafelice
UFU

Resumo

Nesta palestra será apresentada uma ferramenta computacional para determinar os parâmetros de um sistema de equações diferenciais com retardo. Este sistema modela matematicamente a dinâmica da corrente sanguínea de um indivíduo HIV com tratamento antirretroviral. Quando o vírus atinge a corrente sanguínea, este ataca principalmente o linfócito T CD4+. Os efeitos da terapia antirretroviral são modelados usando um Sistema Baseado em Regras Fuzzy para três indivíduos hipotéticos. Para cada um deles, determinamos a taxa de infecção do linfócito T CD4+, que é diferente de zero, contrário a outro estudo relatado na literatura.

6.11 Mantendo a coesão e coerência em redações científicas usando mapas conceituais

Prof. Dr. Tiago Fernandes Tavares
FEEC-UNICAMP

Resumo

A pós-graduação envolve, para muitos, a redação de artigos científicos. Eles são escritos em um estilo específico, que é marcado pela exatidão e pela objetividade. Tais requisitos podem ser atingidos através de treino e do emprego de ferramentas de redação adequadas. Uma dessas ferramentas - o mapa conceitual - permite descrever o conhecimento como um grafo. Isso permite verificar a exatidão e objetividade de um raciocínio e, após, transpô-lo para o formato texto. Essa técnica será demonstrada nesta palestra, voltada a estudantes de pós-graduação interessados em usar a escrita científica em suas carreiras acadêmicas.

6.12 Saúde mental na pós graduação: aspectos emocionais e acadêmicos na atualidade

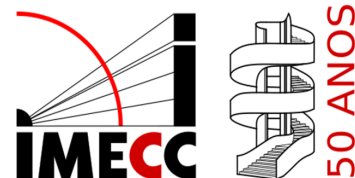
Dra. Tânia Maron
SAPPE-UNICAMP

Resumo

A pós-graduação é momento de importantes construções e definições na vida de um sujeito, tanto no aspecto pessoal quanto profissional. Como equilibrar todos esses aspectos, como vida social, a formação de novos laços familiares, com a carga de trabalho? Como se portar nas relações interpessoais? E essa relação tão especial entre orientador e orientando? São essas algumas das questões a serem abordadas nesse evento.



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



7. Palestras de Divulgação

7.1 Qual é o papel do cientista de dados no Mercado de Trabalho?

Camila Reis e Lucas De Paula
SAS

Nesta apresentação Camila Reis e Lucas De Paula – mostrarão algumas noções relevantes para um cientista de dados na atualidade como:

1. Qual é o papel do Cientista da Dados?
2. Razões para formar um Cientista de Dados.
3. Por que saber SAS é tão importante nos dias de hoje? – Casos Práticos
4. Evolução Salarial
5. O que é SAS?
6. Software Free – SAS On Demand – Como acessar.

7.2 Uso de Tecnologia na geração de confiança. Um case ClearSale!

Mateus Munhoz

Clearsale

Clearsale uma empresa multinacional que promove a confiança nas relações entre empresas e consumidores através da Transformação Digital e Prevenção à Fraude, foi premiada como uma das PMEs que ma Eleita por 6 anos consecutivos (2011, 2012, 2013, 2014, 2015 e 2016), neste evento o palestrante Mateus Munhoz manager da empresa, apresentará um case da Clearsale sobre o uso da tecnologia na geração de confiança.

7.3 Preciso falar inglês. E agora?

Aguinaldo Oliveira

UPTIME

Uptime – Comunicações em Inglês: Desde a sua fundação em 2001, na cidade de Belo Horizonte, a escola se tornou, justificadamente, sinônimo de inovação no ensino do idioma inglês. Durante nosso evento o palestrante Aguinaldo Oliveira, membro da equipe Uptime, ministrará a palestra intitulada: Preciso falar inglês. E agora? Além disso, durante a palestra será sorteada um bolsa de estudos e todos os inscritos no evento terão direito a um desconto de 15 % no curso de idioma.

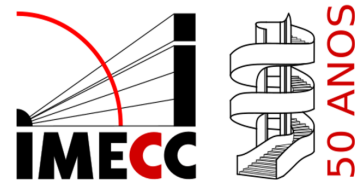


Apresentações de Alunos

8	Apresentações Oraís	27
9	Pôsteres	66



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



8. Apresentações Orais

Use os links abaixo para navegar nas Apresentações Orais

- Automata generating free products of groups of order 2 (Marcelo Miranda)
- Boa colocação para um fluxo de dois fluidos não isotérmicos, viscosos e incompressíveis (Juliana Honda Lopes)
- Coincidência entre pares de aplicações entre T -fibrados sobre S^1 (Leticia Sanches Silva)
- Entropia de Folheações e Pseudogrupos (Douglas Luiz Finamore Barbosa)
- Estimates for n -widths of sets of smooth functions on the complex sphere Ω_d (Deimer José Julio Aleans)
- Graduações nas álgebras de incidência de dimensão finita (Felipe Yukihide Yasumura)
- Identidades polinomiais \mathbb{Z} -graduadas da álgebra de Grassmann (Alan de Araújo Guimarães)
- Limit cycles on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ and for Piecewise Smooth Vector Fields on the Torus (Joyce Aparecida Casimiro)
- MADS e Busca Coordenada para Otimização de Parâmetros de Máquinas de Vetores Suporte (Natalha Cristina da Cruz Machado Benatti)
- Método de Galerkin Descontínuo para leis de conservação hiperbólicas em malhas quadrilaterais arbitrárias no espaço $P^1(\mathbb{R}, E)$ (Felipe Augusto Guedes da Silva)
- Modelagem da Dinâmica do HIV sob Tratamento Antirretroviral com Princípio de Extensão de Zadeh Bivariável (Kassandra Elena Inoñan Alfaro)
- Modelagem matemática da dinâmica de infecção do vírus da Zika incluindo transmissão sexual (Luis Pedro Lombardi Junior)
- Modelo Multiescala e Homogenização da proliferação de células anormais no cólon (Geovan Carlos Mendonça Campos)
- On moments of doubly truncated multivariate distributions (Christian Eduardo Galarza Morales)
- Operadores multilineares somantes por blocos arbitrários: os casos isotrópicos e anisotrópicos (Davidson Freitas Nogueira)
- Otimização Topológica de Estruturas Tridimensionais (Alfredo Vitorino)
- Revisitando o algoritmo LSTRS para o subproblema de região de confiança (Ismael Navarrete Márquez)
- Sapos em árvores? Condições para a transição de fase (Jaime Utria)
- Segmentação de Imagens com Campos Aleatórios Markovianos Ocultos (Victor Freguglia Souza)
- Topological Methods in the Study of Differential Equations (Francisco Bruno Gomes da Silva)

Automata generating free products of groups of order 2

Marcelo Miranda¹, ¹Departamento de Matemática, University of Campinas, Campinas, Brazil

Abstract

We construct a family of automata (the Bellaterra automata) that have $n \geq 4$ states acting on a rooted binary tree generating free products of cyclic groups of order 2 going through the concept of automata group. This work is based on the article [3].

Keywords: automata, automata group, free products, Bellaterra automaton

Introduction

An *automaton* (or a *Mealy automaton*) \mathcal{A} consists of a tuple (Q, X, π, λ) , in which Q is a set of states, X is a finite alphabet, $\pi : Q \times X \rightarrow Q$ is a transition function and $\lambda : Q \times X \rightarrow X$ is an output function. Among all the types of automata, we highlight finite invertible automaton (all definitions related are shown in the article) in order to define an automata group.

A special family of automata which has fundamental importance to our work are the Bellaterra automata, first studied during the summer school in automata groups at the University of Barcelona in Bellaterra, in 2004 (this is why these automata receive this name); such automata are defined by wreath recursion. We show, on this work, that such family fits exactly in the main theorem.

Outline

Given a finite invertible automaton \mathcal{A} , an automata group is the group generated by the functions defined by all states of \mathcal{A} . Such functions act on the set X^* of finite words over X ; also, such alphabet can correspond to a regular rooted tree. Automata groups started to be mentioned in articles during the 1960s by M. Glushov and J. Horejs. However, only in the 1980s such mathematical objects gained more attention, after some mathematicians have shown that automata groups contain counterexamples to the general Burnside problem.

Many years later, the Bellaterra automata emerged as a good example of birreversible automata (invertible automata whose dual and the dual of its inverse are invertible) and a seemingly good source for free groups and free products. The Bellaterra automaton was discovered while classifying all bireversible 3-state automata over a 2-letter alphabet, so we consider such automata acting on the set $\{0, 1\}^*$ of finite words over $X^* = \{0, 1\}$

We prove here that a 4-state Bellaterra automaton that satisfies some conditions about the permutations defined on its wreath recursion generates the free product of 4 groups of order 2. After proving this theorem, we show how to prove its generalization; in other words, the Bellaterra automata of n states generates the free product of n groups of order 2. Its proof is somehow similar to the case of $n = 4$; it starts by adapting the definition of \mathcal{B}_n ($n > 4$, Bellaterra automaton with n states) from the \mathcal{B}_4 . Then, we use an approach alike the one used on the proof of the first case.

Final remarks

This article aims to discuss an interesting result on Geometric Group Theory by means of automata proved by D. Savchuk and Y. Vorobets on [3].

Referências Bibliográficas

- [1] Meier, J., Groups, Graphs and Trees - An Introduction to the Geometry of Infinite Groups. *London Mathematical Society Student Texts*, Cambridge University Press, 2008.

¹marcelomiranda_01@hotmail.com

- [2] Nekrashevych, V., Self-similar groups and their geometry, *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, volume 1, 2007.
- [3] Savchuk, D. and Vorobets, Y. Automata generating free products of groups of order 2, *Journal of Algebra*, volume 336, 2011.



Boa colocação para um fluxo de dois fluidos não isotérmicos, viscosos e incompressíveis

Juliana Honda Lopes¹, Gabriela Planas²

¹Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos

²Departamento de Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Resumo

O estudo da dinâmica da interface de uma mistura de dois fluidos diferentes desempenha um papel importante na teoria da hidrodinâmica, devido às crescentes aplicações na engenharia. Neste trabalho, estudamos um modelo de interface difusa não isotérmico que descreve a mistura de dois fluidos incompressíveis. O modelo consiste da equação de Navier-Stokes acoplada com a equação de campo de fase, que é do tipo Allen-Cahn convectiva, e com a equação para a temperatura. Além disso, consideramos condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade e Neumann para o campo de fase e para a temperatura.

Mais precisamente, consideramos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\nu(\theta) Du) + \nabla p &= (-\varepsilon \Delta \phi + F'(\phi)) \nabla \phi - \alpha \Delta \theta \nabla \theta \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ \phi_t + u \cdot \nabla \phi &= \gamma (\varepsilon \Delta \phi - F'(\phi)) \\ \theta_t + u \cdot \nabla \theta &= k \Delta \theta \end{aligned}$$

em $\Omega \times (0, \infty)$, em que Ω é um domínio limitado em \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, com fronteira $\partial\Omega$ suave.

Este modelo admite uma desigualdade de energia dissipativa. Além disso, investigamos a boa colocação do problema em dimensões dois e três sem quaisquer restrições no tamanho dos dados iniciais. Mais ainda, foram considerados os casos em que o potencial de energia da equação do campo de fase é regular e singular.

Palavras-chave: Modelo de Campo de Fase, Equação de Navier-Stokes, Equação de Allen-Cahn.

Referências Bibliográficas

- [1] J. H. Lopes and G. Planas, Well-posedness for a non-isothermal flow of two viscous incompressible fluids, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 17, 2018, 2455–2477. DOI: 10.3934/cpaa.2018117.

¹juhonlopes@gmail.com

²gplanas@ime.unicamp.br

Coincidência entre pares de aplicações entre T -fibrados sobre S^1

Leticia Sanches Silva¹, João Peres Vieira²

¹Departamento de Física, Química e Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba

²Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro

Resumo

Sejam $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$ aplicações que preservam fibra sobre o círculo, S^1 , onde $M(\phi_1)$ e $M(\phi_2)$ são fibrados sobre S^1 com fibra toro, T . O principal objetivo deste trabalho é classificar os pares de aplicações (f, g) que podem ser deformados por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') , $f', g' : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$, livre de coincidência.

Palavras-chave: Coincidência, T -fibrados

Introdução

A questão inicial que motivou o problema proposto é a seguinte pergunta: dada uma fibração $p : M \rightarrow S^1$ e aplicações $f, g : M \rightarrow M$, que preservam fibra sobre S^1 , sendo $f = Id$, é possível deformar a aplicação g por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a uma aplicação g' livre de ponto fixo? Este problema foi considerado

- Por E. Fadell e S. Husseine em [1](1981), para fibrados $F \rightarrow M \xrightarrow{p} B$ com F, M e B variedades compactas sem bordo.
- Por D. Gonçalves em [2](1987), para fibrados onde M e B variedades compactas sem bordo e a fibra é S^1 .
- Por D. L. Gonçalves, D. Penteadó, e J. P. Vieira [3](2004), para T -fibrados sobre S^1 .
- Por D. L. Gonçalves, D. Penteadó, e J. P. Vieira [4](2009), para K -fibrados sobre S^1 .
- Em [6](2012), W. L. Silva e J. P. Vieira investigaram este problema no caso em que f e g são aplicações em fibrados com base S^1 e fibra garrafa de Klein.
- Posteriormente, em [5](2015), o autor J. Vieira considerou aplicações em fibrados sobre o círculo, S^1 , com fibra toro, T , $f, g : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$ e investigou quando o par (f, g) pode ser deformado por uma homotopia que preserva fibra sobre S^1 a um par (f', g') , $f', g' : M(\phi) \rightarrow M(\phi)$, livre de coincidência.

O problema estudado se fundamenta em avaliar esta questão considerando, agora, dois homeomorfismos do toro $\phi_1, \phi_2 : T \rightarrow T$ e aplicações $f, g : M(\phi_1) \rightarrow M(\phi_2)$.

Desenvolvimento

Em suma, resolver o problema proposto se reduz a estudar uma equação algébrica denominada equação principal. Quando esta equação admite solução, conclui-se que o par (f, g) pode ser deformado a um par (f', g') livre de coincidência. Caso contrário, não é possível obter a deformabilidade desejada. Se existe uma certa dificuldade em encontrar uma solução para a equação principal, a ideia é abelianizar a equação e avaliar se há ou não solução nesta situação. Se a equação abelianizada não possui solução, infere-se que a equação original também não possui solução. Caso seja encontrada uma solução para a equação abelianizada, não se pode concluir que a equação original também admite solução, mas a partir da solução encontrada para a equação abelianizada se induz uma solução para a equação original.

Considerações Finais

O problema envolvendo apenas um homeomorfismo do Toro abordou 6 estudos de casos. Neste problema, apareceram 29 situações para serem analisadas, originando um teorema principal dividido em 7 ítems.

¹leticiasanches@dm.ufscar.br

²jpvieira@rc.unesp.br

Referências Bibliográficas

- [1] E. Fadell and S. Husseini, *A fixed point theory for fiber-preserving maps*, Lecture Notes in Mathematics, volume 886, Springer, 49-72, 1981.
- [2] D. L. Gonçalves, *Fixed Point of S^1 -Fibrations*, Pacific J. Math., volume 129, 297-306, 1987.
- [3] D. L. Gonçalves, D. Penteadó, and J. P. Vieira, *Fixed points on Torus fiber bundles over the circle*, Fund. Math., volume 183(1), 1-38, 2004.
- [4] D. L. Gonçalves, D. Penteadó, and J. P. Vieira, *Fixed points on Klein bottle fiber bundles over the circle*, Fund. Math., volume 203(3), 263-292, 2009.
- [5] J. P. Vieira, *Coincidence of maps on Torus fibre bundles over the circle*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2015.
- [6] W. L. Silva and J. P. Vieira, *Coincidences of self-maps on Klein bottle fiber bundles over the circle*, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 12, Number 1, 55-97, 2012.

Entropia de Folheações e Pseudogrupos

Douglas Finamore¹, ¹Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil

Resumo

Neste trabalho dois tipos distintos de entropia são apresentados: a entropia topológica para pseudogrupos e a entropia geométrica para folheações. Alguns resultados no sentido de relacionar a entropia geométrica de uma folheação com a entropia topológica de seu pseudogrupo de holonomia são apresentados, junto de aplicações dos conceitos de entropia no estudo da dinâmica da folheação em questão.

Palavras-chave: Folheações, Pseudogrupos, Holonomia, Entropia

Introdução

Uma folheação \mathcal{F} de uma variedade riemanniana M consiste de uma partição de M por subvariedades, chamadas de folhas, que admitem uma trivialização local, ou seja, localmente essa partição tem o mesmo formato que uma partição trivial de um aberto de algum \mathbb{R}^n . Folheações surgem naturalmente no estudo de sistemas dinâmicos como objetos geométricos invariantes por uma dada dinâmica. Este é o caso, por exemplo, dos sistemas de Anosov que admitem um par de folheações, chamadas de folheação estável e folheação instável, as quais são invariantes pelo difeomorfismo em si e que apresentam características de contração e expansão.

O estudo da dinâmica de uma folheação busca responder perguntas sobre o comportamento típico das folhas de uma folheação enquanto subvariedades de M . Problemas típicos da teoria envolvem por exemplo propriedades de recorrência das folhas ou ainda questões mais delicadas como a existência de medidas transversais invariantes não triviais. As principais ferramentas nesse estudo são o pseudogrupo de holonomia, o qual é uma família de transformações que codificam as folhas de \mathcal{F} , e a entropia geométrica de uma folheação, introduzida por Ghys, Langevin e Walczak em [1], a qual é uma medida da complexidade da dinâmica de uma folheação e captura informações essenciais sobre a dinâmica das folhas.

Desenvolvimento

Um pseudogrupo de transformações \mathcal{G} é dito *regular* se possui um conjunto gerador finito e simétrico $\Gamma = \{f_i : D_i \rightarrow R_i\}$ tal que cada domínio D_i é relativamente compacto e cada f_i admite uma extensão $\tilde{f}_i : \tilde{D}_i \rightarrow \tilde{R}_i$ com $\tilde{D}_i \subset \tilde{D}_i$. Dizemos que $g \in \Gamma_n$ se localmente g é escrito como composição de n elementos de Γ .

Se (X, d) é um espaço métrico compacto e \mathcal{G} é um pseudogrupo regular agindo em X , dois pontos x, y de X são ditos (n, ε) -separados se existe $g \in \Gamma_n$ o qual o domínio contém ambos x e y , e $d(g(x), g(y)) \geq \varepsilon$. Um conjunto E é dito (n, ε) -separado se todos os seus pontos são dois a dois (n, ε) -separados. A compacidade de X implica que todo conjunto (n, ε) -separado é finito. Definimos

$$s(n, \varepsilon, \Gamma) = \max\{\#E; E \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado}\},$$

$$s(\varepsilon, \Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln s(n, \varepsilon, \Gamma).$$

O número $h(\mathcal{G}, \Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\varepsilon, \Gamma)$ é chamado de *entropia topológica* de \mathcal{G} com respeito a Γ .

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta munida de uma folheação \mathcal{F} e de uma cobertura regular \mathcal{U} . Seja d a função distância em M . Devido a compacidade, existe um número positivo ε_0 tal que qualquer ponto $x \in U \in \mathcal{U}$ pode ser projetado ortogonalmente na placa $P_y \subset U$ passando por um ponto y desde que a distância entre x e y não seja maior que ε_0 .

¹ra192291@ime.unicamp.br

Dois pontos x e y da transversal completa T são ditos (R, ε) -separados por \mathcal{F} se $d(x, y) \geq \varepsilon_0$ ou se existe uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{F}(x)$ começando em x e de comprimento menor que R tal que $d(\gamma(1), p_y \gamma(1)) \geq \varepsilon$ (ou uma curva $\delta : I \rightarrow \mathcal{F}(y)$ começando em y e de comprimento menor que R tal que $d(\delta(1), p_x \delta(1)) \geq \varepsilon$), onde a função $p_y \gamma(t) = \exp_{\gamma(t)} X(t)$ é uma projeção de γ na folha contendo y , definida através de um campo contínuo $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$ de vetores ortogonais a \mathcal{F} ao longo de γ , tal que $|X(t)| \leq \varepsilon_0$ e $p_y \gamma(0)$ pertence a placa P_y que contém y .

Um subconjunto A de T é (R, ε) -separado quando quaisquer dois pontos distintos de A são (R, ε) -separados. A entropia geométrica $h_g(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} com respeito a g é definida por

$$h_g(\mathcal{F}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} s(\varepsilon, \mathcal{F})$$

onde

$$s(\varepsilon, \mathcal{F}) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \ln s(R, \varepsilon, \mathcal{F})$$

e $s(R, \varepsilon, \mathcal{F})$ é a cardinalidade máxima de um subconjunto (R, ε) -separado de T .

O principal resultado relacionando esses dois conceitos é

Theorem 1 (Ghys - Langevin - Walczak). *Dada uma folheação \mathcal{F} em uma variedade riemanniana (M, g) , vale*

$$h_g(\mathcal{F}) = \sup_{\mathcal{U}} \frac{1}{\text{diam}(\mathcal{U})} h(\mathcal{G}_{\mathcal{U}}, \Gamma_{\mathcal{U}}),$$

onde $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ e $\Gamma_{\mathcal{U}}$ são, respectivamente, o pseudogrupo de holonomia e o gerador simétrico associados ao atlas regular \mathcal{U} de \mathcal{F} .

Na teoria das folheações, folhas resilientes são análogas às órbitas homoclínicas da teoria de sistemas dinâmicos. Como um exemplo de aplicação do conceito de entropia exibimos o seguinte resultado:

Theorem 2 (Hurder). *Uma folheação \mathcal{F} de classe C^1 em uma variedade riemanniana compacta possui uma folha resiliente se e somente possui entropia geométrica positiva.*

Uma classe especial de pseudogrupos são os chamados pseudogrupos de Markov, os quais tem a dinâmica ditada por uma matriz de transição (veja [3]). Para esse tipo de pseudogrupo, temos:

Theorem 3. *Seja \mathcal{F} uma folheação C^1 na variedade riemanniana fechada (M, g) . Se seu pseudogrupo de holonomia \mathcal{H} possui um conjunto minimal de Markov K , então a entropia geométrica de \mathcal{F} é positiva. Reciprocamente, se $h_g(\mathcal{F}) > 0$ então \mathcal{H} possui um conjunto minimal de Markov discreto e caótico.*

Referências Bibliográficas

- [1] E. Ghys, R. Langevin, and P. Walczak. Entropie Geometrique des Feuilletages, *Acta Math*, volume 160: 105 – 142, 1988. DOI: 10.1007/BF02392274
- [2] S. Hurder. Entropy and Dynamics of C^1 Foliations, *preprint*, disponível em <http://homepages.math.uic.edu/hurder/publications.html>, 2000.
- [3] P. Walczak. *Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

Estimates for n-widths of sets of smooth functions on the complex sphere Ω_d

Deimer J. J. Aleans¹, Sergio A. Tozoni²

¹Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil

²Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil

keywords: Complex sphere, Width, Multiplier, Smooth function.

Introduction

In this work, we investigate n-widths of multiplier operators $\Lambda = \{\lambda_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ and $\Lambda_* = \{\lambda_{m,n}^*\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, $\Lambda, \Lambda_* : L^p(\Omega_d) \rightarrow L^q(\Omega_d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, on the d-dimensional complex sphere Ω_d , where $\lambda_{m,n} = \lambda(|(m,n)|)$ and $\lambda_{m,n}^* = \lambda(|(m,n)|_*)$ for a real function λ defined on the interval $[0, \infty)$ with $|(m,n)| = \max\{m,n\}$ and $|(m,n)|_* = m+n$. Upper and lower bounds are established for n-widths of general multiplier operators and we apply these results to the specific multiplier operators $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{m,n}^{(1)}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ and $\Lambda_*^{(1)} = \{\lambda_{m,n}^{(1),*}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ associated with the function $\lambda^{(1)}(t) = t^{-\gamma}(\ln t)^{-\xi}$ for $t > 1$ and $\lambda^{(1)}(t) = 0$ for $0 \leq t \leq 1$, and $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{m,n}^{(2)}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ and $\Lambda_*^{(2)} = \{\lambda_{m,n}^{(2),*}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ associated with the function $\lambda^{(2)}(t) = e^{-\gamma t^r}$ for $t \geq 0$, where $\gamma, r > 0$ and $\xi \geq 0$. We have that $\Lambda^{(1)}U_p$ and $\Lambda_*^{(1)}U_p$ are sets of finitely differentiable functions on Ω_d , in particular, $\Lambda^{(1)}U_p$ and $\Lambda_*^{(1)}U_p$ are Sobolev-type classes if $\xi = 0$, and $\Lambda^{(2)}U_p$ and $\Lambda_*^{(2)}U_p$ are sets of infinitely differentiable ($0 < r < 1$) or analytic ($r = 1$) or entire ($r > 1$) functions on Ω_d , where U_p denotes the closed unit ball of $L^p(\Omega_d)$. In particular, we prove that the estimates for the Kolmogorov n-widths $d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q(\Omega_d))$, $d_n(\Lambda_*^{(1)}U_p, L^q(\Omega_d))$, $d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q(\Omega_d))$ and $d_n(\Lambda_*^{(2)}U_p, L^q(\Omega_d))$ are order sharp in various important situations. In this work we continue the development of methods of estimating n-widths of multiplier operators begun in [1, 2].

Consider two Banach spaces X and Y . The norm of X will be denoted by $\|\cdot\|_X$. Let A be a convex, compact, centrally symmetric subset of X . The Kolmogorov n-width of A in X is defined by

$$d_n(A; X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

where X_n runs over all subspaces of X of dimension n .

Let $l, N, m, n, M_1, M_2 \in \mathbb{N}$, with $M_1 < M_2$, $\mathcal{H}_l = \bigoplus_{(m,n) \in A_l \setminus A_{l-1}} \mathcal{H}_{m,n}$ and $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=0}^N \mathcal{H}_l = \bigoplus_{(m,n) \in A_N} \mathcal{H}_{m,n}$ where $A_l = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |(m,n)| \leq l\}$ and $\mathcal{H}_{m,n}$ is the space of all complex spherical harmonics of degree (m, n) .

Main Results

Theorem 8.0.1. *Let $1 \leq q \leq p \leq 2$, $0 < \rho < 1$, $s = \dim \mathcal{T}_N$, $d_l = \dim \mathcal{H}_l$ and $\lambda : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a non-increasing function with $\lambda(t) \neq 0$ for $t \geq 0$ and $\Lambda = \{\lambda_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_{m,n} = \lambda(|(m,n)|)$. Then there is an absolute constant $C > 0$ such that*

$$d_{\lfloor \rho s - 1 \rfloor}(\Lambda U_p, L^p) \geq C(1 - \rho)^{1/2} s^{1/2} \left(\sum_{l=1}^N |\lambda(l)|^{-2} d_l \right)^{-1/2} \kappa_s,$$

where

$$\kappa_s = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2, 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln s)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2, q = 1, \\ (\ln s)^{-1/2}, & p = \infty, 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

¹ra162238@ime.unicamp.br

²tozoni@ime.unicamp.br

and $[\rho s - 1]$ denotes the integer part of the number $\rho s - 1$.

Theorem 8.0.2. Let $\lambda : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a non-increasing function and let $\Lambda = \{\lambda_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_{m,n} = \lambda(|(m,n)|)$ such that $\lambda_{m,n} \neq 0$ for all $m, n \in \mathbb{N}$. Suppose that $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ and that the multiplier operator Λ is bounded from L_1 to L_2 . Let $\{N_k\}_{k=0}^\infty$ and $\{m_k\}_{k=0}^M$ be sequences of natural numbers such that $N_k < N_{k+1}$, $N_0 = 0$ and $\sum_{k=0}^M m_k \leq \beta$. Then there exist an absolute constant $C > 0$ such that

$$d_\beta(\Lambda U_p; L^q) \leq C \left(\sum_{k=1}^M |\lambda(N_k)| \rho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^\infty |\lambda(N_k)| (\theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/p-1/q} \right),$$

where

$$\rho_{m_k} = \frac{\theta_{N_k, N_{k+1}}^{1/p}}{(m_k)^{1/2}} \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln \theta_{N_k, N_{k+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \quad \text{and} \quad \theta_{N_k, N_{k+1}} = \sum_{s=N_k+1}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s, \quad k \geq 1.$$

Theorem 8.0.3. For $\gamma > (2d-1)/2$, $\xi \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ and for all $k \in \mathbb{N}$

$$\max\{d_k(\Lambda^{(1)} U_p, L^q), d_k(\Lambda_*^{(1)} U_p, L^q)\} \ll k^{-\gamma/(2d-1)+(1/p-1/2)+} (\ln k)^{-\xi} \vartheta_k,$$

where

$$\vartheta_k = \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln k)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}$$

Theorem 8.0.4. For $\gamma > (2d-1)/2$, $\xi \geq 0$, κ_k as in Theorem 0.8 and for all $k \in \mathbb{N}$

$$\min\{d_k(\Lambda^{(1)} U_p, L^q), d_k(\Lambda_*^{(1)} U_p, L^q)\} \gg k^{-\gamma/(2d-1)} (\ln k)^{-\xi} \kappa_k.$$

Theorem 8.0.5. Let $\gamma > 0$, $0 < r \leq 1$, and κ_k as in Theorem 0.8. Then for all $k \in \mathbb{N}$ we have

$$d_k(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}k^r/(2d-1)} \kappa_k, \\ d_k(\Lambda_*^{(2)} U_p, L^q) \gg e^{-\mathcal{R}_*k^r/(2d-1)} \kappa_k,$$

where

$$\mathcal{R} = \gamma \left(\frac{d!(d-1)!}{2} \right)^{r/(2d-1)}, \quad \mathcal{R}_* = \gamma \left(\frac{(2d-1)!}{2} \right)^{r/(2d-1)}.$$

Theorem 8.0.6. Let $\gamma > 0$, $0 < r \leq 1$, ϑ_k as in Theorem 8.0.3 and \mathcal{R} and \mathcal{R}_* as in Theorem 8.0.5. Then for $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$, for all $k \in \mathbb{N}$, we have

$$d_k(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{R}k^r/(2d-1)} k^{(1-r/(2d-1))(1/p-1/2)+} \vartheta_k, \\ d_k(\Lambda_*^{(2)} U_p, L^q) \ll e^{-\mathcal{R}_*k^r/(2d-1)} k^{(1-r/(2d-1))(1/p-1/2)+} \vartheta_k.$$

The results for the multiplier operators Λ_* associated with the norm $|\cdot|_*$ were obtained, from results already demonstrated for the real sphere S^{2d-1} , using properties which relate the real spherical harmonics with the complex spherical harmonics. We proved estimates for Levy means of norms on the \mathbb{R}^n spaces, introduced through the multiplier sequence Λ . These estimates were the main tool to prove Theorems 0.8 and 8.0.2. Using Theorems 0.8 and 8.0.2, and the inequality $2/(d!(d-1)!)N^{2d-1} - C_3N^{2d-2} \leq \dim \mathcal{T}_N \leq 2/(d!(d-1)!)N^{2d-1} + C_4N^{2d-2}$ which we proved, we proved the Theorems 8.0.3, 8.0.4, 8.0.5 and 8.0.6 for the multiplier operators Λ associated with norm $|\cdot|$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Kushpel and S. Tozoni - *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces*. Constr. Approx. **35** (2012), 137-180
- [2] A. Kushpel, R. Stábile and S. Tozoni - *Estimates for n -widths of sets of smooth functions on the torus \mathbb{T}^d* . J. Approx. Theory **183** (2014), 45-71.
- [3] W. Rudin - *Function Theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* . Springer-Verlag, New York, 1980.



Gradações nas álgebras de incidência de dimensão finita

Ednei A. Santulo Junior¹, Jonathan P. Souza², Felipe Y. Yasumura³

^{1,2}Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Brasil.

³Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Resumo

Nesta apresentação, introduziremos a noção de álgebras graduadas e discutiremos a questão da classificação das possíveis gradações em uma dada álgebra. Falaremos dos resultados mais influentes da área e de recentes avanços. Por fim, apresentaremos os estudos relacionados com a investigação de álgebras não-simples, incluindo nosso trabalho a respeito das gradações nas álgebras de incidência. Este é um trabalho em conjunto com o colega da pós-graduação de Maringá, Jonathan Souza, e seu orientador, Prof. Ednei Santulo.

Palavras-chave: Álgebra associativa, álgebra de incidência, álgebra graduada. **Agradecimentos.** F. Yasumura foi financiado pela Fapesp, processo 2013/22.802-1.

Referências Bibliográficas

- [1] Y. A. Bahturin, S. K. Sehgal, M. Zaicev, *Group gradings on associative algebras*, Journal of Algebra **241**(2) (2001), 677–698.
- [2] Y. A. Bahturin, I. P. Shestakov, M. Zaicev, *Gradings on simple Jordan and Lie algebras*, Journal of Algebra **283**(2) (2005), 849–868.
- [3] O. Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, *Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities*, Journal of Algebra **275** (2004), 550–566.
- [4] E. Santulo Jr, J. P. Souza, F. Y. Yasumura, *Group gradings on finite dimensional incidence algebras*, em preparação.
- [5] A. Valenti, M. Zaicev, *Group gradings on upper triangular matrices*, Archiv der Mathematik **89** (2007), 33–40.

¹easjunior@uem.br

²jonathanprass@hotmail.com

³fyyasumura@mun.ca

Identidades polinomiais \mathbb{Z} -graduadas da álgebra de Grassmann

Alan de Araújo Guimarães¹, Plamen Emilov Kochloukov², ¹Universidade Estadual de Campinas

²Universidade Estadual de Campinas

Resumo

As álgebras com identidades polinomiais são um objeto de grande relevância na teoria de anéis. Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ em variáveis não comutativas que se anula em qualquer avaliação feita por elementos de A . Uma álgebra A diz-se uma PI-álgebra se admite uma identidade polinomial não nula. Exemplos clássicos de PI-álgebras são as álgebras comutativas, as álgebras de dimensão finita e as álgebras nilpotentes e seu estudo se tornou um campo fértil dentro da matemática. Um conceito essencial na Teoria das Álgebras com Identidades Polinomiais (PI-teoria) é a noção de gradações de grupos sobre álgebras associativas.

Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo F de característica zero. Sabe-se que E é uma das álgebras mais importantes dentro da PI-teoria. Tal álgebra admite uma \mathbb{Z}_2 -gradação natural $E_{can} = E_{(0)} \oplus E_{(1)}$, onde $E_{(0)}$ é gerado pela unidade e pelos monômios de tamanho par e $E_{(1)}$ é gerado pelos monômios de tamanho ímpar. Aqui ressaltamos que uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada é comumente chamada de superálgebra.

Somente nos últimos quinze anos as gradações da álgebra Grassmann têm sido investigadas mais de perto e vários artigos vêm abordando a questão. Em 2001 Anisimov [1] investigou a estrutura de E munida pela ação de automorfismos ou involuções, mas não descreveu explicitamente gradações em E . Na verdade, a completa classificação das superálgebras de Grassmann (homogêneas) e de suas identidades graduadas em característica zero se deu em 2009 por Di Vincenzo e Da Silva [3], onde os autores exibiram três classes delas, a saber: E_{k^*} , E_∞ e E_k . O mesmo problema foi resolvido em [2], sobre corpos infinitos de característica $p > 2$.

Neste trabalho, estudaremos as \mathbb{Z} -gradações da álgebra de Grassmann E e, também, as respectivas identidades polinomiais \mathbb{Z} -graduadas. A única \mathbb{Z} -gradação em E trazida na literatura é a sua \mathbb{Z} -gradação natural, aqui denotada por E^{can} . É fácil ver que a superálgebra E_{can} pode ser obtida de E^{can} pela gradação quociente módulo $2\mathbb{Z}$. Veremos que o mesmo ocorre para E_∞ , E_k e E_{k^*} . Precisamente, construiremos três tipos de \mathbb{Z} -gradações em E , denotadas por E^∞ , E^k e E^{k^*} , que se relacionam com E_∞ , E_k e E_{k^*} via a gradação quociente induzida módulo $2\mathbb{Z}$. Além disso, determinamos as identidades polinomiais \mathbb{Z} -graduadas para E^{k^*} e E^∞ .

De forma mais geral, exibiremos um método que permite construir \mathbb{Z} -gradações em E de maneira bastante natural. Partindo de duas listas (n_1, \dots, n_l) e (v_1, \dots, v_l) , onde $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ e $v_j \in \mathbb{N}$ ou $v_j = \infty$ para $j = 1, \dots, l$, dotamos E de uma estrutura de \mathbb{Z} -gradação. Descrevemos as identidades para algumas dessas estruturas.

Investigamos tais estruturas sobre corpos de característica zero e, depois, sobre corpos infinitos de característica $p > 2$. Ressaltamos que tais resultados deverão ser submetidos para publicação em breve.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Anisimov, \mathbb{Z}_p -codimensions of \mathbb{Z}_p -identities of Grassmann algebra, *Comm. Algebra* 29(9), 4211-4230, (2001).
- [2] L. Centrone, \mathbb{Z}_2 -graded identities of the Grassmann algebra in positive characteristic, *Linear Algebra Appl.* 435, 3297-3313, (2011).
- [3] O. M. Di Vincenzo, V. R. T. Da Silva, *On \mathbb{Z}_2 -graded polynomial identities of the Grassmann algebra*, *Linear Algebra Appl.* 431, 56-72, (2009).

¹ra162216@ime.unicamp.br

²plamen@ime.unicamp.br

Limit cycles on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ and for Piecewise Smooth Vector Fields on the Torus

Joyce Aparecida Casimiro¹, Ph.D. Ricardo Miranda Martins².

^{1,2}Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation, State University of Campinas

Abstract

In this work we study the existence of limit cycles for two kind of dynamical systems: perturbations of piecewise smooth systems in \mathbb{R}^n possessing a invariant compact submanifold filled by periodic orbits and also linear dynamical systems on manifolds of the form $M = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{S}^k)^m$. The case $m = 0$, in particular when $n = 2$, has been exhaustively studied in the last years, so we consider $n \geq 0$ and $m, k \geq 1$. We prove sharp estimates for the number of limit cycles in both cases.

Palavras-chave: limit cycles, piecewise smooth dynamics.

Limit cycles on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}$

Consider the vector field X on the manifold $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S} \approx \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ with coordinates $r \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$ and $\theta \in \mathbb{S}^1$ associated with the following system of differential equations

$$\dot{r} = -z, \quad \dot{z} = r - 1, \quad \dot{\theta} = 1. \quad (0.1)$$

Let $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ be the Hamiltonian

$$\begin{aligned} H(r, z, w, \theta) &= \frac{z^2 + (r-1)^2}{2} + w + \varepsilon(a_1 r + a_2 z + a_3 w + a_4 r^2 + a_5 z^2 + a_6 w^2 \\ &+ a_7 r z + a_8 r w + a_9 z w + (b_1 w + b_2 w^2)(c_0 - 2\pi c_2 \theta + c_2 \theta^2)), \end{aligned}$$

the Hamiltonian system associated to H restricted to the invariant hyperplane $w = 0$ is given by

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -H_z = -z - \varepsilon(a_2 + 2a_5 z + a_7 r), \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial r} = H_r = r - 1 + \varepsilon(a_1 + 2a_4 r + a_7 z), \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial w} = H_w = 1 + \varepsilon(a_3 + a_8 r + a_9 z + b_1(c_0 - 2c_2\pi\theta + c_2\theta^2)), \end{aligned} \quad (0.2)$$

Note that, for $\varepsilon = 0$ the system (0.2) coincides with the system (0.1). The perturbed system (0.2) may be written as $\dot{\mathbf{z}} = F_0(\mathbf{z}) + \varepsilon F_1(\mathbf{z})$. Hence if $M_{\mathbf{z}}^{-1}(t)$ is a fundamental matrix for the unperturbed system $\dot{\mathbf{z}} = F_0(\mathbf{z})$, then the averaged function

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \int_0^{2\pi} M_{\mathbf{z}}^{-1}(t) F_1(x(t, \mathbf{z}, 0)) d\theta = (\mathcal{F}_1(\mathbf{z}), \mathcal{F}_2(\mathbf{z}), \mathcal{F}_3(\mathbf{z})),$$

is given by $\mathcal{F}_1(\mathbf{z}) = -2\pi z_0(a_5 + a_4)$, $\mathcal{F}_2(\mathbf{z}) = 2\pi(r_0 - 1)(a_5 + a_4)$, $\mathcal{F}_3(\mathbf{z}) = \frac{-2}{3}\pi(2\pi^2 b_1 c_2 - 3\theta_0^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8)$. If $a = (r_0, z_0, \theta_0)$ is a simple zero of \mathcal{F} , then there exists a limit cycle $\varphi(t, \varepsilon)$, 2π -periodic for system (0.2) such that $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Since $\det((d\mathcal{F}/d\mathbf{z})(a)) = 0$ if, and only if, $\theta_0 = 0$, then a is given by $r_0 = 1$, $z_0 = 0$ and $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ satisfying $2\pi^2 b_1 c_2 - 3\theta_0^2 b_1 c_2 - 3b_1 c_0 - 3a_3 - 3a_8 = 0$.

¹joyceap01@hotmail.com

²rmiranda@ime.unicamp.br

Piecewise Smooth Vector Fields on the Torus

Let $\mathbb{T} = \mathbb{T}^+ \cup \mathbb{T}^-$ be the two-dimensional torus where \mathbb{T}^+ and \mathbb{T}^- denote the upper and the lower-half of the torus, respectively. Define $\Sigma_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = 0\}$ and $\Sigma_2 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = \frac{1}{2}\}$, curves that together break \mathbb{T} into two connected components. Let Ω be the space of vector fields on \mathbb{T} and X_L, X_R the linear and Riccati vector fields with constant coefficients, respectively. Put

$$X_{LR}(x, y) = \begin{cases} X_L^+(x, y) = (a^+y + b^+, c^+y + d^+) & \text{for } (x, y) \in \mathbb{T}^+, \\ X_R^-(x, y) = (1, e^- + f^-y + g^-y^2) & \text{for } (x, y) \in \mathbb{T}^-, \end{cases}$$

where $a^+, b^+, c^+, d^+, e^-, f^-, g^- \in \mathbb{R}$. Consider the function $F(x, y) = (\cos(2\pi x), 0)$ defined in \mathbb{T} and the following perturbation in the vector field X_{LR}

$$X_{LRF-} = X_{LR} + \varepsilon(\vec{0}, F). \quad (0.3)$$

The flow passing through the point $p = (x_0, y_0)$ of the vector fields X_L^+ and X_{RF} is given, respectively, by $\phi_{X_{L^+}}$ and $\phi_{X_{RF}}$. Consider the subfamilies of Ω given by

$$\Omega_{L^+}^1 = \left\{ X_{L^+}; c^+ > 0, d^+ > -\frac{c^+}{2} \right\}, \quad \Omega_{L^+}^2 = \left\{ X_{L^+}; c^+ < 0, -1 < \frac{c^+}{(c^+ + 2d^+)} < 0 \right\},$$

$$\Omega_{R^-}^2 = \left\{ X_{R^-}; f^- > 0, e^-g^- > \left(\frac{f^-}{2}\right)^2, \tan^{-1}(\theta_1^-) > \sec^{-1}(\theta_2^-) \right\},$$

where $\theta_1^- = (f^- + g^-)/\sqrt{4e^-g^- - (f^-)^2}$ and $\theta_2^- = 2\sqrt{e^-g^-/4e^-g^- - (f^-)^2}$.

Teorema 8.1 If $X_{LRF-} \in [\Omega_{L^+}^1 \cup \Omega_{L^+}^2] \cap \Omega_{R^-}^2$ and ε is a small positive number then the first return map $P_{LRF-} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ is well defined, the maximum number of limit cycles of X_{LRF-} is two and this upper bound is reached.

Teorema 8.2 Consider the PSVF $X_{Ck} = (X_C, X_k) = ((b^+, d^+), (\alpha, \beta \cos(2k\pi x)))$ in \mathbb{T} having a finite number of fold-regular points in Σ , with $b^+, d^+ \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. For this PSVF there exists a choice of the parameters of X_{Ck} such that it has at most k limit cycles, and this upper bound is reached for every $k \geq 1$.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Llibre, R. M. Martins, D. J. Tonon, *Limit cycles of piecewise smooth differential equations on two dimensional torus*, accepted to publication, Journal of Dynamics and Differential Equations, p. 1-17, 2017.
- [2] J. Llibre, X. Zhang, *Limit cycles of linear vector fields on manifolds*, Nonlinearity, v. 29, n. 10, p. 3120, 2016.

MADS e Busca Coordenada para Otimização de Parâmetros de Máquinas de Vetores Suporte

Natalha Cristina C. M. Benatti¹, Lucas Garcia Pedroso².

¹Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

²Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil

Resumo

Neste trabalho apresentamos os resultados obtidos com a utilização de métodos de Otimização sem Derivada na busca de parâmetros ótimos para Máquinas de Vetores Suporte. Os métodos utilizados foram a busca coordenada e a busca direta com malha adaptável (MADS) e foram comparados com a clássica busca por *grid* na aplicação a trinta e quatro problemas de classificação binária da biblioteca LIBSVM.

Palavras-chave: Máquinas de vetores suporte, Otimização sem derivadas, parâmetros algorítmicos, busca padrão, método de busca direta com malha adaptável.

Introdução

Aprendizagem de Máquina é um campo da Otimização de grande interesse por seu potencial de aplicação a problemas práticos. O objeto de estudo deste trabalho são as máquinas de vetores suporte, método que encontra-se em ascensão justamente por sua alta capacidade de resolver problemas reais.

As máquinas de vetores suporte para classificação são algoritmos no âmbito de reconhecimento de padrões e têm o intuito de classificar objetos n -dimensionais $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ utilizando, para isso, um hiperplano. No caso mais simples, consideramos duas classes, às quais chamamos classe positiva X^+ e negativa X^- , denominado classificação binária. Para encontrar o padrão dos elementos analisados, são utilizadas amostras onde já se conhece a classe a que cada elemento do conjunto de dados pertence, criando um modelo para futuras avaliações.

Desenvolvimento

Consideremos m pontos $(x^{(1)}, y_1), \dots, (x^{(m)}, y_m) \in X \times \{-1, 1\}$, com $X \subset \mathbb{R}^n$ constituindo o conjunto dos dados sendo a união disjunta dos conjuntos X^+ e X^- , onde $y_i = 1$ quando $x^{(i)} \in X^+$ e $y_i = -1$ quando $x^{(i)} \in X^-$. O objetivo é encontrar um hiperplano $w^{*T}x + b^* = 0$ que separe os pontos de classes distintas, definindo o modelo $m(x) = \text{sin}(\langle w^{*T}x + b^* \rangle)$. De tal modo, um novo dado x poderá ser classificado como pertencente à classe positiva X^+ se $w^{*T}x + b^* > 0$, isto é, $m(x) = 1$, ou à classe negativa X^- se $w^{*T}x + b^* < 0$, isto é, $m(x) = -1$.

A formulação geral das máquinas de vetores suporte é dita com margens flexíveis utilizando função *Kernel*, onde seu problema dual é dado por

$$\begin{aligned} \max_{\alpha \in \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i=1}^m \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_i \alpha_j y_i y_j k(x^{(i)}, x^{(j)}) \\ \text{s. a} \quad & \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i = 0 \\ & 0 \leq \alpha \leq C, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (0.4)$$

onde $C > 0$ é dita constante de regularização e $k(x^{(i)}, x^{(j)}) = \langle \varphi(x^{(i)}), \varphi(x^{(j)}) \rangle$ função *Kernel*, com $\varphi : X \rightarrow \mathcal{S}$ um mapeamento dos dados de X no espaço de características \mathcal{S} , mais detalhes em [5]. Neste caso, o classificador é

¹natalha.benatti@gmail.com

²lucaspedroso@ufpr.br

definido por

$$m(x) = \text{sinal}(w^{*T}x + b^*) = \text{sinal}\left(\sum_{i \in I} \alpha_i y_i k(x^{(i)}, x) + \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \left(y_i - \sum_{j \in I} \alpha_j y_j k(x^{(j)}, x^{(i)})\right)\right). \quad (0.5)$$

A eficácia do modelo depende da função *kernel* e da seleção dos parâmetros da máquina, sendo eles a constante que regulariza os termos da função objetivo do problema e os parâmetros da função *kernel* utilizada. Estes interferem diretamente nos resultados, sua escolha pode provocar situações indesejadas como o *overfitting* e o *underfitting*, resultando em modelos que não generalizam bem os dados. Efetivamente, buscamos um classificador que tenha uma boa taxa de acertos no conjunto de testes, denotada neste trabalho por *ac*, e uma baixa taxa de vetores suporte, denotada por *vs*. Desta forma, consideramos como problema a minimização da função de mérito

$$\Psi(ac, vs) = -ac + 10vs, \quad (0.6)$$

do qual temos somente a avaliação da função com relação aos parâmetros do modelo, e não sua representação analítica. Por isso, para realizar tal minimização foi necessário utilizar métodos de Otimização sem derivadas, restringindo-se ao conhecimento da avaliação da função de mérito para cada conjunto de parâmetros fixados arbitrariamente.

Com o objetivo de encontrar um método para seleção de modelos competente como a busca por *grid*, que é a mais utilizada na prática mas que demanda de alto custo computacional, aplicamos dois métodos de Otimização sem derivadas, sendo eles o método de Busca Coordenada [4] e o método de Busca Direta com Malha Adaptável [1], [6]. Estes métodos foram comparados com a clássica busca por *grid* na aplicação a trinta e quatro problemas de classificação binária da biblioteca LIBSVM. Biblioteca referência para máquinas de vetores suporte desenvolvida por [3].

Em 47.1% dos problemas os métodos de seleção de modelos MADS e Busca Coordenada foram os mais eficientes, enquanto a busca por *grid* foi mais eficiente em 8.8% dos problemas. Já em termos de robustez, a busca por *grid* levou 112.1 vezes o melhor trabalho para atingir 91.2% de robustez, seguido pelo MADS que levou 2.7 vezes o melhor trabalho para atingir 82.4% de robustez. O menos robusto foi o método de busca coordenada, que levou 1.3 vezes o melhor trabalho para resolver 70.6% dos problemas. Além disso, o método MADS apresentou em média 97.9% de redução de avaliações de função em relação ao *grid*, e a busca coordenada reduziu 98.1% o número de avaliações de função em relação ao *grid*. Mais detalhes sobre os testes realizados e os métodos utilizados são encontrados em [2].

Considerações Finais

Constatamos que a busca coordenada e a busca direta com malha adaptável foram capazes de encontrar parâmetros tão bons quanto a busca por *grid*, com baixa taxa de vetores suporte e alta taxa de acerto no conjunto de teste, resultando em horas ou até dias de economia de processamento.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Audet e J. E. Dennis Jr. *Mesh Adaptive Direct Search Algorithms for Constrained Optimization*. SIAM Journal on Optimization. V. 17, 2006. pp. 188–217.
- [2] N. C. C. M. Benatti. *Métodos de Busca Direta para Seleção de Parâmetros em Máquinas de Vetores Suporte*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.
- [3] C. C. Chang e C. J. Lin. *LIBSVM: A Library for Support Vector Machines*. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology, V. 2, N. 3, artigo 27, New York, 2011. pp. 1-27.
- [4] A. R. Conn, K. Scheinberg e L. N. Vicente. *Introduction to Derivative-Free Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

-
- [5] C. Cortes e V. N. Vapnik. *Support Vector Networks*. Machine Learning, V 20, n 3. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995. pp. 273–297.
- [6] V. Torczon. *On the Convergence of Pattern Search Algorithms*. SIAM Journal on Optimization. V. 7, 1997. pp. 1-25.



Método de Galerkin Descontínuo para leis de conservação hiperbólicas em malhas quadrilaterais arbitrárias no espaço $P^1(\mathbb{R}, E)$

Felipe A. G. Silva¹, Eduardo Abreu², Maicon R. Correa.³

^{1,2,3} Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, Brasil.

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste no estudo e na proposição de um método de Galerkin Descontínuo estável para a aproximação numérica de problemas diferenciais bidimensionais de natureza hiperbólica, com fluxos lineares e não-lineares em malhas quadrilaterais arbitrárias, usando aproximações do tipo Strong Stability Preserving Runge-Kutta no tempo e o espaço de aproximação espacial $P^1(\mathbb{R}, E)$. Na direção da estabilização do método de Galerkin Descontínuo são exploradas as boas propriedades de estabilidade local no tempo com os métodos da classe Strong Stability Preserving Runge-Kutta, em conjunto com funções de fluxo numérico estáveis e o uso da técnica de Reconstrução do Gradiente, com o objetivo de desenvolver um método de Galerkin Descontínuo capaz de obter uma boa resolução de gradientes abruptos e de soluções descontínuas, sem oscilações espúrias.

Palavras-chave: Problemas hiperbólicos, Método de Galerkin Descontínuo, Método de Runge-Kutta, Reconstrução do Gradiente.

Método DG

O método de Galerkin Descontínuo (DG, do inglês *Discontinuous Galerkin*) é uma classe dos Métodos de Elementos Finitos cuja formulação variacional permite o emprego de polinômios descontínuos por partes para compor os espaços de aproximação. O método DG combina diversas características interessantes do método de elementos finitos clássico e do método de volumes finitos, compondo uma ferramenta importante para aproximar soluções de equações diferenciais, como por exemplo, em problemas de escoamentos em meios porosos, de dinâmica de fluidos e eletrodinâmica [1].

Método DG Estabilizado

É sabido que o método DG apresenta oscilações espúrias na presença de gradientes abruptos quando utilizamos o espaço de aproximação espacial $P^1(\mathbb{R}, E)$ [1]. Assim, para conter tais oscilações propomos uma estratégia de estabilização baseada na técnica *Reconstrução do Gradiente* [2] na qual utilizaremos esta técnica no sentido de controlar os gradientes locais das soluções em $P^1(\mathbb{R}, E)$, com o objetivo de obter aproximações numéricas estáveis e com boa resolução de gradientes abruptos e de soluções descontínuas, sem o surgimento de oscilações espúrias. Além disso, aliada a reconstrução dos gradientes locais via a técnica *Reconstrução do Gradiente* utilizaremos aproximações temporais do tipo *Strong Stability Preserving Runge-Kutta* (SSPRK) [3], que possuem boas propriedades de estabilidade local, e funções de fluxo numérico estáveis, tais como o fluxo *Local Lax-Friedrichs* [1], aproximando numericamente problemas hiperbólicos que admitem fluxos lineares e não-lineares em malhas quadrilaterais quaisquer. Nas Figuras 8.1 e 8.2 temos exemplos da atuação da estratégia de estabilização em um caso linear (a esquerda) e não-linear (a direita).

Conclusões

A utilização do método DG e de esquemas de evolução temporal da classe SSPRK combinados com as estratégias da técnica de Reconstrução do Gradiente fornecem bons resultados numéricos, controlando as oscilações espúrias decorrentes da utilização do método DG no espaço $P^1(\mathbb{R}, E)$, além de reduzir a difusão numérica.

¹felipe.augusto.guedes@gmail.com

²eabreu@ime.unicamp.br

³maicon@ime.unicamp.br

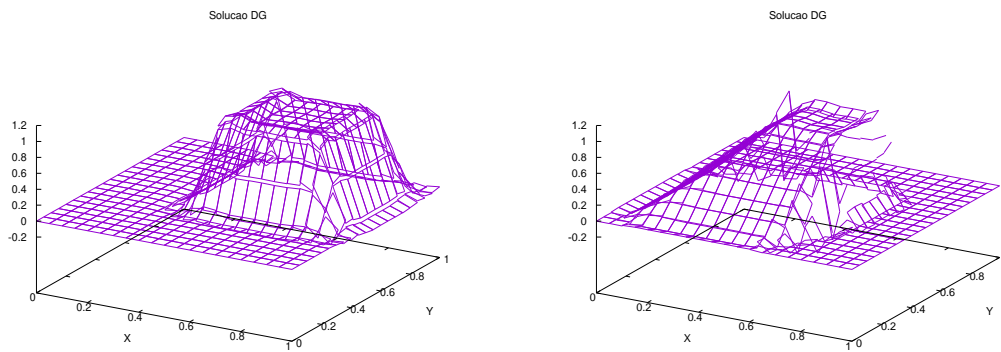


Figure 8.1: Soluções da Equação de Advecção Linear (a esquerda) e da Equação de Burgers não-viscosa (a direita) sem aplicação da estabilização.

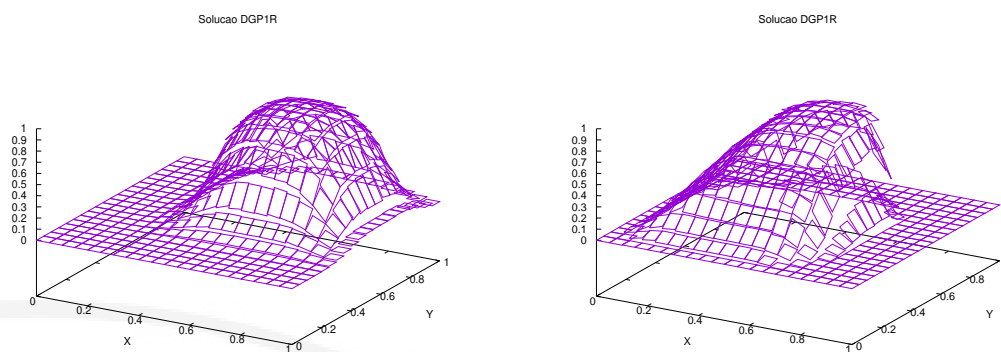


Figure 8.2: Soluções da Equação de Advecção Linear (a esquerda) e da Equação de Burgers não-viscosa (a direita) com aplicação da estabilização.

Referências Bibliográficas

- [1] Cockburn, B. and Shu, C. W. (1998). "The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems", *Journal of Computational Physics*, 141(2), 199-224.
- [2] Gottlieb, S. and Shu, C. W. (1998). "Total variation diminishing Runge-Kutta schemes", *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 67(221), 73-85.
- [3] Dutykh, D., Poncet, R. and Dias, F. (2011). "The VOLNA code for the numerical modeling of tsunami waves: Generation, propagation and inundation", *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 30(6), 598-615

Modelagem da Dinâmica do HIV sob Tratamento Antirretroviral com Princípio de Extensão de Zadeh Bivariável

Kassandra I. Alfaro¹, Rosana M. Jafelice², Ana Maria A. Bertone³

Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a solução fuzzy de um sistema de equações diferenciais ordinárias que simula a evolução do vírus imunodeficiência humana (HIV) submetido a tratamento antirretroviral, tendo como parâmetros dois números fuzzy triangulares. Estes parâmetros, que surgem da incerteza dos fenômenos biológicos, são a taxa de infecção das células não infectadas de CD4+ pelo vírus e a taxa de reprodução do vírus que são influenciadas pelo tratamento e variam de acordo com cada indivíduo soropositivo ao HIV. Utilizamos o princípio de extensão de Zadeh bivariável para obter a solução deste sistema. O comportamento da solução do sistema é compatível com o esperado na literatura.

Palavras-chave: Dinâmica do HIV, Extensão de Zadeh Bivariável.

Introdução

Nowak e Bangham apresentam em [2] um modelo da dinâmica do HIV que contém quatro variáveis dependendo do tempo t , que representam: $n(t)$, a população de células não infectadas; $i(t)$, a população de células infectadas que produzem o vírus; $v(t)$, a carga viral plasmática e $z(t)$, a magnitude do linfócito T citotóxico (CTL); cujas taxas de mortalidade são respectivamente a , b , s e d . O valor p é a taxa de mortalidade das células infectadas causadas por CTL, e c é a taxa de proliferação do CTL em resposta do antígeno. O modelo presume que as células não infectadas são continuamente produzidas pelo corpo humano a um influxo constante r . Assim, o sistema de equações diferenciais é dado por

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= r - an - \beta nv \\ \frac{di}{dt} &= \beta nv - bi - piz \\ \frac{dv}{dt} &= ki - sv \\ \frac{dz}{dt} &= ciz - dz.\end{aligned}\tag{0.7}$$

Reescrevendo o sistema como $\dot{x}(t) = G(n(t), i(t), v(t), z(t), \beta, k)$, com condições iniciais $x_0 = (n(0), i(0), v(0), z(0))$ e aplicando o teorema de existência e unicidade, obtemos a única solução $\phi(t, \beta, k)$ em algum aberto de \mathbb{R}^3 que é contínua. Fixando t , definimos a função $\mathcal{F}^t(\beta, k) = \phi(t, \beta, k)$. Neste trabalho, a taxa de infecção das células não infectadas CD4+ pelo vírus (β) e a taxa de reprodução do vírus (k) ambas são consideradas como números fuzzy triangulares que denotamos por A_1 e A_2 , respectivamente.

Seja $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e A_1 e A_2 conjunto fuzzy, define-se a extensão de Zadeh de (A_1, A_2) ao conjunto fuzzy cuja função de pertinência é

$$\mu_{\widehat{\mathcal{F}}(A_1, A_2)}(y) = \sup_{\{(x_1, x_2) : \mathcal{F}(x_1, x_2) = y\}} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}, \text{ se } \{(x_1, x_2) : \mathcal{F}(x_1, x_2) = y\} \neq \emptyset \text{ e } 0 \text{ caso contrário,}\tag{0.8}$$

¹kassanddra.alfaro@ufu.br

²rmotta@ufu.br

³amabertone@ufu.br

No caso que \mathcal{F} seja contínua e A_1, A_2 são números fuzzy triangulares, temos a seguinte afirmação [3]:

$$[\mathcal{F}(A_1, A_2)]^\alpha = \mathcal{F}([A_1]^\alpha, [A_2]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, em que $[B]^\alpha$ representa o α -nível do conjunto fuzzy B [3].

Resultados

Os parâmetros são obtidos através do autômato celular, que é uma ferramenta computacional, baseado no estudo de Jafelice et al. [1]. Os dados fornecidos são: $r = 20$, $a = 1/4$, $b = 1/5$, $p = 0.4$, $s = 1/2$, $c = 1/14$ e $d = 1/15$, e a condição inicial $x_0 = (0.99, 0.01, 0.1, 0.01)$. Além disso, as taxas β e k são representadas como os números fuzzy triangulares $(0.1; 0.35; 0.6)$ e $(0.0625; 0.13125; 0.2)$, respectivamente. Utilizando a função \mathcal{F}^t foi implementado um algoritmo para obter a solução fuzzy através da extensão de Zadeh bivariável.

Na Figura 8.3 é apresentada a solução fuzzy do sistema (0.7) na suas quatro componentes. Pode-se observar que, à medida que o tempo passa, as células não infectadas e os CTLs aumentam até estabilizar em torno de um número. Notamos também que a carga viral e as células infectadas diminuem drasticamente com o tempo. A região amarela é a que melhor representa o fenômeno biológico, por ter grau de pertinência próximos de 1.

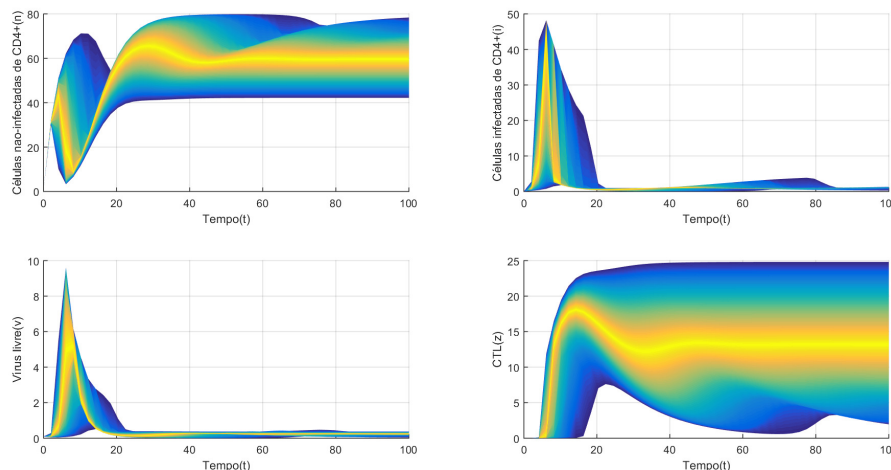


Figure 8.3: Solução fuzzy do sistema (0.7) com os parâmetros fuzzy triangulares β e k .

Considerações Finais

Este estudo mostra a capacidade do modelo de incorporar incertezas que são provenientes de fenômenos biológicos. A extensão de Zadeh bivariável pode ser implementada computacionalmente com eficiência e, inclusive, o algoritmo construído pode ser ampliado para mais variáveis.

Referências Bibliográficas

- [1] R. M. Jafelice, C. A. F. Silva, L. C. Barros and R. C. Bassanezi, A fuzzy Delay Approach for HIV Dynamics Using a Cellular Automaton, *Journal of Applied Mathematics*, 2015. DOI: 10.1155/2015/378753.
- [2] M. A. Nowak and C. R. M. Bangham, Population dynamics of immune responses to persistent viruses. *Science*, 1996. DOI: 10.1126/science.272.5258.74.
- [3] H. T. Nguyen, A note on the extension principle for fuzzy sets, *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 1978. DOI: 10.1016/0022-247X(78)90045-8.

Modelagem matemática da dinâmica de infecção do vírus da Zika incluindo transmissão sexual

Luis P. Lombardi Jr.¹, Hyun M. Yang²

^{1,2}Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas

Resumo

O vírus da Zika é um flavivírus transmitido principalmente pelas picadas dos mosquitos do gênero *Aedes*, e que pode ocasionar complicações no sistema nervoso. Além do vetor, a infecção pode ser sexualmente transmitida e este fato é agravado pela duradoura persistência do vírus no sêmen. Neste trabalho desenvolvemos um modelo matemático de equações diferenciais ordinárias não lineares a fim de melhor compreender a dinâmica de infecção deste vírus. A análise do modelo nos permite garantir a existência de dois pontos de equilíbrio, o primeiro é livre da doença e no segundo a infecção persiste na população, sendo que a estabilidade destes equilíbrios pode ser verificada de acordo com o número básico de reprodução. Simulações numéricas do modelo foram realizadas para obtermos as trajetórias do sistema e verificarmos se a transmissão sexual tem de fato impacto no espalhamento da doença.

Palavras-chave: Zika vírus, Sistemas dinâmicos diferenciais, Estabilidade, Transmissão sexual.

Introdução

Declarado como uma doença emergente, segundo o "Centers for Disease Control and Prevention" (CDC) somente no ano de 2016 o ZIKV afetou cerca de 1,3 milhão de pessoas no Brasil, além de outros vinte países e territórios que também relataram transmissão local do vírus. Este espalhamento está entrelaçado principalmente com seus meios de transmissão, sendo o principal deles através dos mosquitos do gênero *Aedes*.

O primeiro indício de transmissão sexual do ZIKV foi apresentado em 2011 e desde então diversos outros estudos relataram esta possibilidade. Além deste fato, o vírus é capaz de infectar os espermatozoides e lá permanecem mesmo após o fim dos sintomas.

A infecção pelo ZIKV também está associada a complicações neurológicas como a microcefalia, caracterizada pela redução do perímetro cefálico, normalmente ocasionada pela má formação das células neurais.

Desenvolvimento

A população de humanos será dividida em três subpopulações: jovens, mulheres adultas e homens adultos, sendo que o compartimento de jovens representa a parcela da população (em geral mais jovem) que ainda não está casada, enquanto os demais correspondem aos indivíduos casados. Tal separação é necessária para a introdução da transmissão sexual, que deve ocorrer somente entre os indivíduos casados.

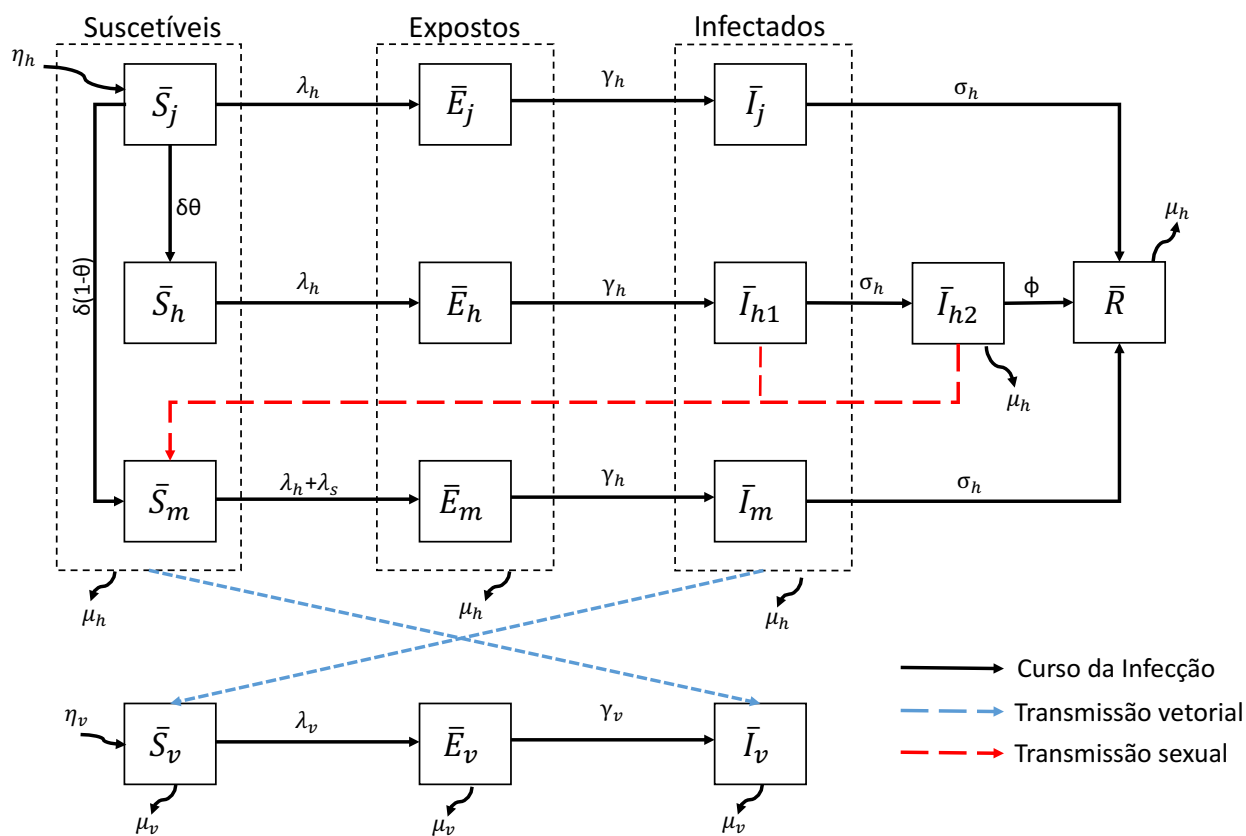
Jovens e mulheres serão divididos em suscetíveis, expostos, infectados e recuperados, enquanto que a subpopulação de homens contará com dois compartimentos para os homens infectados, isto deve-se à permanência do vírus no sêmen, de forma que os indivíduos do primeiro compartimento contribuem tanto para a transmissão vetorial quanto para a sexual, enquanto os indivíduos no segundo compartimento contribuem exclusivamente para a transmissão sexual. De forma similar, dividimos a população de mosquitos em suscetíveis, expostos e infectados.

Com base nessas suposições desenvolvemos um modelo compartimental baseado em equações diferenciais ordinárias não-lineares, utilizando o "princípio da ação das massas" para modelar o encontro entre homens, mulheres e mosquitos, conforme o diagrama abaixo.

¹luispedro_jr@hotmail.com

²hyunyang@ime.unicamp.br

Figure 8.4: Fluxograma para a dinâmica de transmissão do ZIKV.



A análise do modelo permite garantir a existência de dois pontos de equilíbrio e utilizando o método da Matriz da Próxima Geração obtemos uma expressão para o número de reprodutibilidade basal, R_0 , o qual determina a estabilidade local dos pontos de equilíbrios do sistema.

Utilizando simulações numéricas percebemos que a transmissão sexual é muito pouco significativa quando comparada à transmissão sexual. Em alguns cenários menos de 1% das mulheres infectadas foram provenientes da transmissão sexual, no entanto esta proporção pode subir para 10% quando mudamos parâmetros como o contato sexual ou o tempo médio de permanência do vírus no sêmem. Isto sugere que, apesar de a componente sexual não ter um efeito significativo no modelo completo, ela passa a ser relevante quando restringimos a população a grupos específicos, nos quais os parâmetros antes citados são modificados.

Referências Bibliográficas

- [1] LOMBARDI JUNIOR, L. P.; YANG, H. M. Modelagem Matemática da Dinâmica de Infecção do Vírus da Zika incluindo transmissão sexual. 2018 Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)-Instituto de Matemática, Estatística e Computação científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- [2] VAN DEN DRIESSCHE, P; WATMOUGH, J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, v. 180, n. 1-2, p. 29-48, 2002.
- [3] YANG, H.M. The basic reproduction number obtained from Jacobian and nextgeneration matrices - A case study of dengue transmission modelling. *BioSystems* 126, p. 52-75, 2014.

Modelo Multiescala e Homogenização da proliferação de células anormais no cólon

Geovan Carlos M. Campos¹, Giuseppe Romanazzi²

¹IMECC, Universidade Estadual de Campinas, SP

²IMECC, Universidade Estadual de Campinas, SP

Resumo

O cólon humano é formado por milhões de criptas e acredita-se que as mutações no processo de proliferação celular são responsáveis pelos passos iniciais do processo de carcinogênese. O problema da formação de adenomas no cólon epitelial é modelado usando multiescalas. Este modelo é construído a partir das dinâmicas, ao nível microescala, das células dentro micro-cavidades, com o objetivo de simular e prever a evolução de adenomas observáveis ao nível macroescala. Este modelo é resolvido numericamente usando o método FE-HMM de elementos finitos. Para analisar numericamente o erro do método FE-HMM é usada a solução numérica do problema homogeneizado associado. Resultados numéricos das simulações do problema multiescala e do estudo do erro são apresentados.

Palavras-chave: Câncer Colorretal, Modelo Multiescala, Homogenização.

Introdução

O cólon é propício ao desenvolvimento de câncer devido a sua renovação celular, que consiste em um grande número de divisões celulares diárias em pequenas cavidades do cólon epitelial, chamadas de criptas. O cólon epitelial é formado por milhões de criptas e acredita-se que as mutações no processo de proliferação celular são responsáveis pelos passos iniciais do processo de carcinogênese, que consiste na formação de micro-adenomas ACF (Aberrant Crypt Foci) formado da células anormais localizadas em muitas criptas adjacentes. O modelo multiescala apresentado é construído a partir das dinâmicas, ao nível microescala, das células dentro das criptas com o objetivo de simular e prever a evolução do ACF ao nível macroescala. Nós usamos como domínios na microescala uma única cripta que é periodicamente distribuída até completar o domínio da macroescala no cólon epitelial. O seguinte sistema de EDPs modela, no tempo e espaço, a dinâmica das células dentro do cólon em uma única cripta tridimensional S :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} - \nabla_{\Gamma} \cdot (\nabla_{\Gamma} p C) - \nabla_{\Gamma} \cdot (D \nabla_{\Gamma} C) = \gamma C \\ -\Delta_{\Gamma} p = \alpha C \end{cases} \quad (0.9)$$

onde $C(x, t)$ denota a densidade celular, $p(x, t)$ a pressão exercida entre as células na cripta e α é a taxa de proliferação de células anormais. Através de uma mudança de variáveis em (0.1) e da distribuição periódica das criptas εS no cólon, nós obtemos um sistema de equações bidimensionais multiescala, as

¹geovan_carlos@hotmail.com

²roman@ime.unicamp.br

quais, separadamente, possuem solução única:

$$\begin{cases} \varphi^\varepsilon \frac{\partial C^\varepsilon}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathcal{A}^\varepsilon \nabla p^\varepsilon C^\varepsilon) - \nabla \cdot (D \mathcal{A}^\varepsilon \nabla C^\varepsilon) = \varphi^\varepsilon \gamma^\varepsilon C^\varepsilon \\ -\nabla \cdot (\mathcal{A}^\varepsilon \nabla p^\varepsilon) = \varphi^\varepsilon \alpha^\varepsilon C^\varepsilon. \end{cases} \quad (0.10)$$

Desenvolvimento

Em (0.2) $(C^\varepsilon, p^\varepsilon)$ é a solução multiescala do problema e os outros termos são parâmetros que dependem apenas do domínio micro, como por exemplo, a taxa de proliferação de células anormais α^ε . O método da expansão assintótica é aplicada à $C^\varepsilon(X, t)$ e $p^\varepsilon(X, t)$ para encontrar a solução homogenizada (C^0, p^0) da sequência de soluções $(C^\varepsilon, p^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, que aproxima teoricamente a solução multiescala de (0.2) para $\varepsilon \rightarrow 0$. Tal solução homogenizada é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} \frac{\partial C^0}{\partial t} - D \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^0 \nabla C^0) - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^0 \nabla p^0 C^0) = C^0 \tilde{\varphi} \tilde{\gamma} \\ -\nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}^0 \nabla p^0) = \tilde{\varphi} \tilde{\alpha} C^0 \end{cases} \quad (0.11)$$

onde $\tilde{\mathcal{A}}^0$ é o tensor homogenizado.

Para obter ao invés de uma aproximação numérica de $(C^\varepsilon, p^\varepsilon)$ na macroscale para um dado ε , nós implementamos o Método *Finite Element Heterogeneous Multiscale* (FE-HMM) [1, 2] para o problema multiescala (0.2) que produz aproximações em elementos finitos $(C^{\varepsilon, H}, p^{\varepsilon, H})$. Este par numérico é usado para aproximar com um esforço computacional baixo a solução $(C^\varepsilon, p^\varepsilon)$. No entanto, podemos provar, usando uma análise numérica da problema e da solução homogenizada, que a solução numérica $(C^{\varepsilon, H}, p^{\varepsilon, H})$ converge para a solução multiescala $(C^\varepsilon, p^\varepsilon)$ com uma taxa conhecida que depende do espaço de elementos finitos usado.

Considerações Finais

Neste trabalho, nós propomos um modelo multiescala acoplado para descrever, no tempo, a evolução do ACF em uma região do cólon. Este modelo é capaz de reproduzir alguns aspectos peculiares do comportamento das células em um certo domínio e revelar processos que seriam impossíveis de alcançar com experimentos reais. O modelo multiescala usado nos permite obter as altas oscilações dos parâmetros multiescala com uma redução do tempo computacional, comparado com um único modelo microscale.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Abdulle, :*The Finite Element Heterogeneous Multiscale Method: a computational strategy for multiscale PDEs*, Math. Sci. Appl., Vol. 31 (2009).
- [2] I.N. Figueiredo, G. Romanazzi G., Leal C., Engquist B., *Homogenization Model for Aberrant Crypt Foci*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 76,3, pp. 1152-1177, (2016).

On moments of doubly truncated multivariate distributions

Victor H. Lachos¹, Christian E. Galarza², Tsung-I Lin³, Wan-Lun Wang⁴

¹Department of Statistics, University of Connecticut, CT, USA

²Department of Statistics, State University of Campinas, Brazil

³Institute of Statistics, National Chung Hsing University, Taichung, Taiwan

⁴Department of Statistics, Feng Chia University, Taichung, Taiwan

Abstract

Following Kan and Robotti (2017), in this paper recurrence relations for integrals that involve the density of multivariate Student-t distributions are developed. These recursions allow fast computation of the moments of folded and truncated multivariate normal and Student-t distributions. Besides being numerically efficient, the proposed recursions also allow us to obtain explicit expressions of low order moments of folded and truncated multivariate Student-t distributions. The newly methods are implemented in the new R package *MoMt*.

Bibliography

- [1] Kan, R., Robotti, C., 2017. On moments of folded and truncated multivariate normal distributions. *Journal of Computational and Graphical Statistics* (just-accepted).

¹hlachos@uconn.edu

²cgalarza@ime.unicamp.br

³tilin@nchu.edu.tw

⁴wlunwang@fcu.edu.tw

Operadores multilineares somantes por blocos arbitrários: os casos isotrópicos e anisotrópicos

Geraldo M. A. Botelho¹, Davidson F. Nogueira²

¹Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

²Instituto Federal Goiano - Campus Campos Belos, Goiás, Brasil

Resumo

Definimos neste trabalho uma classe geral de operadores multilineares que recupera como caso particulares muitas classes de operadores absolutamente somantes estudados na literatura, incluindo os casos da diagonal e da matriz toda e também os casos isotrópicos e anisotrópicos.

Palavras-chave: Operadores Absolutamente Somantes, Operadores Múltiplo Somantes, Classes de Sequências

Introdução

A teoria dos operadores multilineares absolutamente somantes tem se desenvolvido fortemente nos últimos 30 anos e várias abordagens foram consideradas, cada uma com vantagens. No início considerava-se apenas a soma na diagonal (operadores absolutamente somantes), depois passou-se a estudar a soma na matriz toda (operadores múltiplo somantes), e mais recentemente têm sido estudados alguns casos de somas em determinados blocos da matriz. Ao mesmo tempo, pode-se considerar os casos isotrópico (com a soma sendo feita de uma só vez) e anisotrópico (com a soma iterada ou encaixada).

O objetivo deste trabalho é introduzir um conceito que unifica todos esses casos estudados separadamente. Cada um dos casos estudados até agora será caso particular do conceito aqui introduzido.

Usaremos a noção de classes de sequências vetoriais, introduzido em [1]. Assim, dados uma classe de sequências X e um espaço de Banach E , $X(E)$ será um espaço de sequências a valores em E , de acordo com [1].

Resultados Principais

Neste resumo apresentaremos apenas o caso bilinear da construção. Os casos n -lineares, para $n \geq 2$, são análogos.

As letras E , E_1 , E_2 e F denotarão espaços de Banach. Dados um subconjunto não vazio B de \mathbb{N}^2 , denotaremos por $B^{i_1} = \{i_2 \in \mathbb{N} : (i_1, i_2) \in B\}$. É claro que eventualmente podemos ter $B^{i_1} = \emptyset$.

Proposição 2.1. *Sejam X_1 , X_2 , Y_1 e Y_2 classes de sequências e $B \subseteq \mathbb{N}^2$ não vazio. São equivalentes para um dado operador bilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$:*

(i) $\left((T(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2))_{i_2 \in B^{i_1}} \right)_{i_1=1}^{\infty} \in Y_1(Y_2(F))$ sempre que $(x_j^1)_{j=1}^{\infty} \in X_1(E_1)$, $(x_j^2)_{j=1}^{\infty} \in X_2(E_2)$.

(ii) O operador induzido $\widehat{T}_B : X_1(E_1) \times X_2(E_2) \rightarrow Y_1(Y_2(F))$ definido por

$$\widehat{T}_B \left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, (x_j^2)_{j=1}^{\infty} \right) = \left((T(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2))_{i_2 \in B^{i_1}} \right)_{i_1=1}^{\infty},$$

¹botelho@ufu.br

²davidson.freitas@ifgoiano.edu.br

está bem definido, é bilinear e contínuo.

Definição 2.1. Nas condições da Proposição 2.1, um operador bilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é dito *absolutamente* $(B; X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ -somante se valem as equivalências da proposição 2.1. Em tal caso, escrevemos

$$T \in \mathcal{L}_{B; X_1, X_2; Y_1, Y_2}(E_1, E_2; F) \text{ e } \|T\|_{B; X_1, \dots, X_2; Y_1, \dots, Y_n} := \|\widehat{T}_B\|.$$

A classe de todos os operadores bilineares contínuos que são absolutamente $(B; X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ -somante é denotada por $\mathcal{L}_{B; X_1, X_2; Y_1, Y_2}$

Definição 2.2. Dizemos que a quádrupla ordenada (X_1, X_2, Y_1, Y_2) de classes de seqüências é B -compatível, $B \subseteq \mathbb{N}^2$, se vale $((\lambda_i^1 \lambda_i^2)_{i \in B^1})_{i=1}^\infty \in Y_1(Y_2(\mathbb{K}))$ sempre que $(\lambda_j^i)_{j=1}^\infty \in X_i(\mathbb{K})$, $i = 1, 2$.

Teorema 2.1. Sejam $B \subseteq \mathbb{N}^2$ não vazio e (X_1, X_2, Y_1, Y_2) uma quádrupla ordenada B -compatível de classes de seqüências linearmente estáveis. Então $(\mathcal{L}_{B; X_1, X_2; Y_1, Y_2}, \|\cdot\|_{B; X_1, X_2; Y_1, Y_2})$ é um ideal de Banach de operadores multilineares.

Além de condição suficiente, a B -compatibilidade também é uma condição necessária: prova-se que se a quádrupla (X_1, X_2, Y_1, Y_2) não for B -compatível, então $\mathcal{L}_{B; X_1, X_2; Y_1, Y_2} = \{0\}$ para todos E_1, E_2 e F .

Exemplo 2.1. (O caso isotrópico) Sejam $1 \leq p_1, p_2, q < \infty$, $X_1 = \ell_{p_1}^w(\cdot)$, $X_2 = \ell_{p_2}^w(\cdot)$, $Y_1 = Y_2 = \ell_q(\cdot)$. Tomando o bloco $B = \{(i, i) : i \in \mathbb{N}\}$, recuperamos os operadores absolutamente $(q; p_1, p_2)$ -somantes de [3]. E tomando o bloco $B = \mathbb{N}^2$, recuperamos os operadores múltiplo $(q; p_1, p_2)$ -somantes (veja, por exemplo, [2, 4]). E para um bloco arbitrário B , recupera-se a classe estuda em [4].

Exemplo 2.1. (O caso anisotrópico) Sejam $1 \leq p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, $X_1 = \ell_{p_1}^w(\cdot)$, $X_2 = \ell_{p_2}^w(\cdot)$, $Y_1 = \ell_{q_1}(\cdot)$, $Y_2 = \ell_{q_2}(\cdot)$, $Y_1 = \ell_{q_2}(\cdot)$ e o bloco $B = \mathbb{N}^2$. Um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ é $(B; X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ -somante se, e somente se, para quaisquer seqüências $(x_i)_{i=1}^\infty \in X_1(E_1)$ e $(y_i)_{i=1}^\infty \in X_2(E_2)$ tem-se

$$\left((T(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2))_{i \in \mathbb{N}} \right)_{i=1}^\infty \in \ell_{q_1}(\ell_{q_2}(F)), \text{ ou seja, } \left(\sum_{i_1=1}^\infty \left(\sum_{i_2=1}^\infty \|T(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2)\|_F^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} < \infty.$$

Para uma escolha adequada de bloco B , recupera-se também o caso anisotrópico dos operadores \mathcal{S} -parcialmente somantes de [2].

Referências Bibliográficas

- [1] BOTELHO, G. M. A. AND CAMPOS, J. R. – On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators, *Monatshefte für Mathematik*, v. 183, n. 3, p. 415-435, 2017.
- [2] ARAÚJO, G. D. S. – Some classical inequalities, summability of multilinear operators and strange functions, Tese de Doutorado, *Universidade Federal da Paraíba*, 2016.
- [3] ALENCAR, R. AND MATOS, M. – Some classes of multilinear mappings between Banach spaces. *Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid*, **12**, 1989.
- [4] BAYART, F., PELLEGRINO, D., RUEDA, P. – On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1 -spaces and cotype, arXiv:1805.12500v1[math.FA], 2018.

Otimização Topológica de Estruturas Tridimensionais

Alfredo Vitorino¹, Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto²

¹Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

²Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema de otimização topológica estrutural, cujo propósito é auxiliar na produção de estruturas que tenham a máxima rigidez, para que sejam capazes de suportar cargas externas sem sofrer grandes deslocamentos e deformações, mantendo o equilíbrio estático e atendendo a uma restrição de volume. Aplicamos o método dos elementos finitos para discretizar os domínios nos quais as estruturas devem estar contidas, optando por utilizar elementos que têm a forma de um prisma retangular reto, com oito nós. A topologia ótima da estrutura é determinada pela melhor distribuição das densidades de material em cada elemento. O problema na forma discreta é um problema de otimização não linear, que resolvemos aplicando um algoritmo de programação linear sequencial.

Palavras-chave: Otimização Topológica, Estruturas Tridimensionais, Programação Não Linear.

Introdução

A otimização topológica é um método computacional desenvolvido originalmente com o objetivo de encontrar a estrutura com a maior rigidez (ou a menor flexibilidade) que precisa suportar cargas e satisfazer certas restrições como, por exemplo, conter uma quantidade máxima de material. Os problemas de otimização topológica ganharam destaque devido a diversidade de aplicações nas áreas de engenharia.

Desenvolvimento

De início, conhecemos apenas o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ no qual a estrutura deve ficar contida, as cargas externas aplicadas, os apoios responsáveis pela sustentação da estrutura e a quantidade de material disponível. Buscamos determinar se cada ponto do domínio será vazio ou sólido. Para evitar um problema com variáveis inteiras, permitimos que os pontos tenham densidades, utilizando uma função contínua $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que representa a densidade de material em cada ponto. Aplicamos então o modelo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), no qual utiliza-se a função ρ^p para controlar a distribuição de material, sendo $p > 1$ um parâmetro de penalização responsável pela diminuição da ocorrência de densidades no intervalo $(0, 1)$.

Utilizamos o método dos elementos finitos para discretizar o domínio Ω , dividindo-o em uma malha com um número finito de pequenas regiões, denominadas elementos. Trabalhamos com domínios que têm a forma de um prisma retangular reto, fazendo as divisões de modo que os elementos também são desta forma. Os pontos de interseção das linhas da malha são chamados de nós. Podemos obter o vetor com os deslocamentos nodais, \mathbf{u} , resolvendo o sistema linear $\mathbf{K}(\rho)\mathbf{u} = \mathbf{f}$, que representa a condição de equilíbrio estático da estrutura. A matriz $\mathbf{K}(\rho)$ é denominada matriz de rigidez e o vetor \mathbf{f} é denominado vetor de cargas nodais equivalentes.

¹alfredo_vitorino@hotmail.com

²chico@ime.unicamp.br

Formulamos matematicamente o problema de otimização topológica estrutural com o objetivo de encontrar as densidades de material em cada elemento que minimizem a flexibilidade, sujeito a restrição de volume e garantindo o equilíbrio da estrutura. Após impor condições de contorno relativas aos deslocamentos dos nós na região com apoios, a matriz K , que é simétrica, passa a ser definida positiva, sendo possível resolver o sistema linear e obter $\mathbf{u} = K^{-1}(\rho)\mathbf{f}$. Ficamos então com o problema de otimização não linear:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\rho} \quad & \mathbf{f}^T K^{-1}(\rho)\mathbf{f} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{e=1}^{n_{el}} v_e \rho_e \leq V_{max}, \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, \dots, n_{el}, \end{aligned}$$

onde n_{el} é o número total de elementos na malha, v_e e ρ_e são, respectivamente, o volume e a densidade do elemento e , V_{max} é o volume máximo e ρ_{min} um valor mínimo para as densidades.

Estes problemas têm dimensões grandes, de modo que preferimos utilizar métodos de resolução mais baratos. Um método bastante utilizado na literatura para resolver problemas deste tipo é a programação linear sequencial, que consiste na resolução de uma sequência de problemas de programação linear, que aproximam um problema de otimização não linear.

Resultados Computacionais

Implementamos em Matlab uma versão globalmente convergente da programação linear sequencial, bem como as rotinas necessárias para a aplicação do método dos elementos finitos, e obtivemos os resultados para alguns exemplos de estruturas.

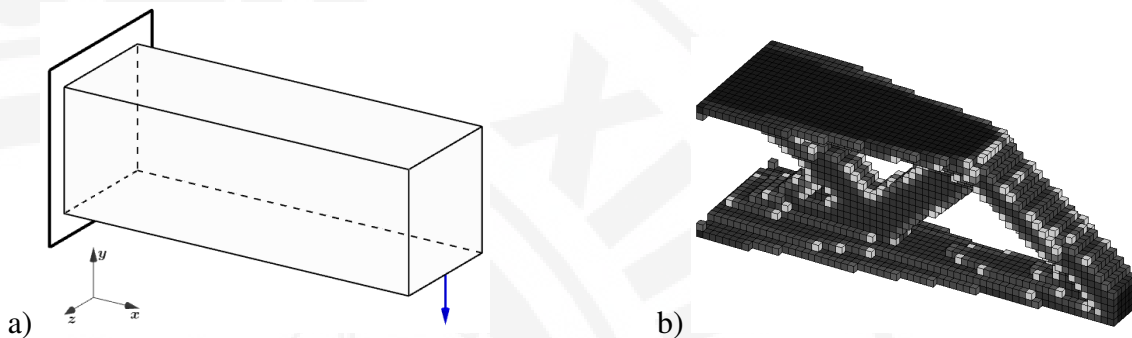
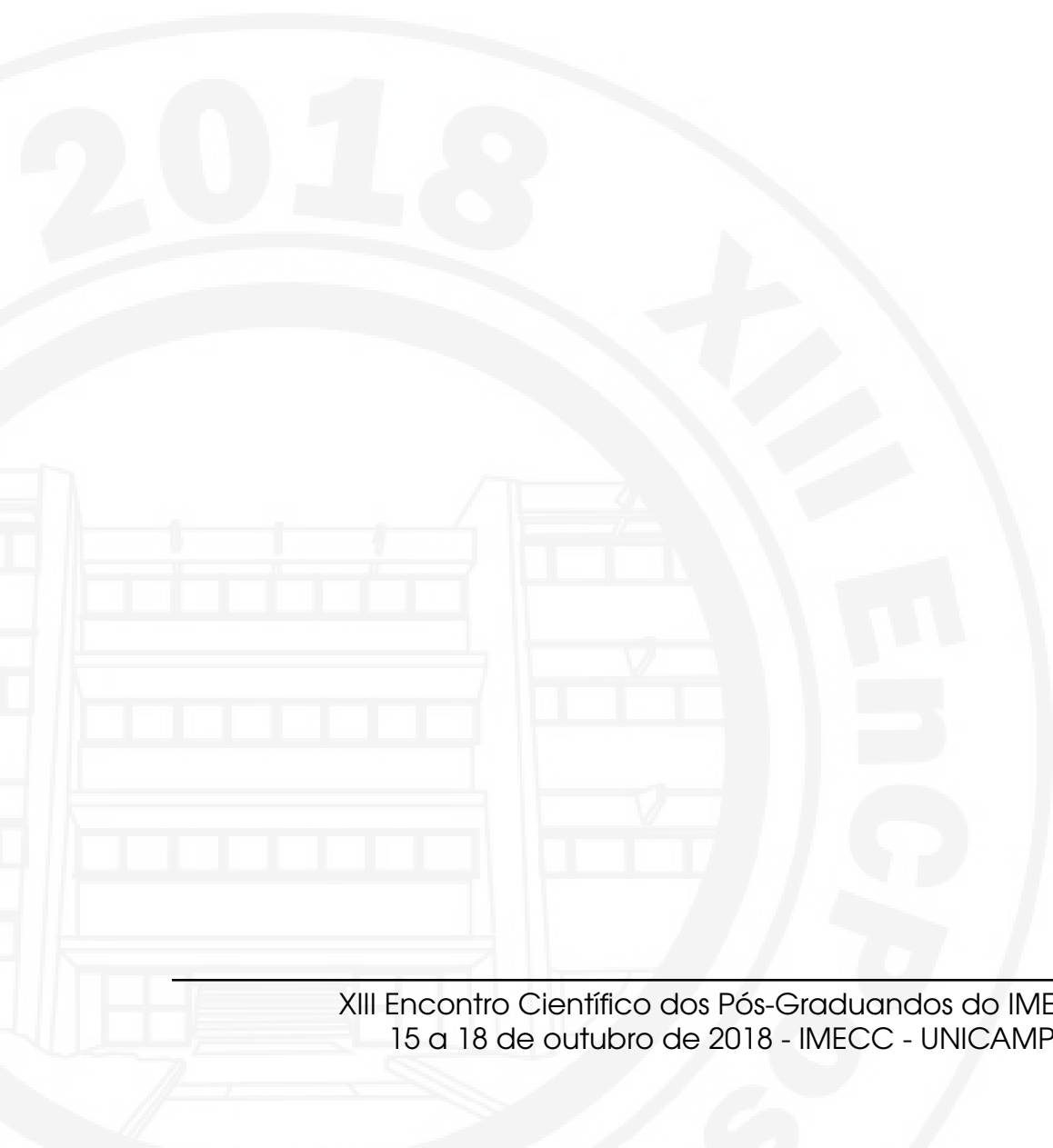


Figure 8.5: Otimização topológica de uma viga em balanço. a) Domínio inicial; b) Estrutura final.

Comparamos o desempenho computacional utilizando a fatoração de Cholesky e o método dos gradientes conjugados com diferentes preconditionadores para resolver os sistemas lineares que aparecem no cálculo da função objetivo. Também fazemos uma análise comparativa do tempo gasto em cada etapa do algoritmo em função do número de elementos da malha e do raio do filtro espacial. A aplicação do filtro tem como objetivo evitar o aparecimento de regiões semelhantes a um tabuleiro de xadrez nas estruturas.

Referências Bibliográficas

- [1] X. Cui, C. Dou e Q. Jiu, Local well-posedness and blow-up criterion for the inviscid Boussinesq system in Hölder spaces, *J. Partial Differ. Equ.* 25 (3) (2012), 220-238.
- [2] Y. Koh, S. Lee e R. Takada, Strichartz estimates for the Euler equations in the rotational framework, *J. Differential Equations* 256 (2) (2014), 707-744.
- [3] Y. Zhou, Local well-posedness for the incompressible Euler equations in the critical Besov spaces, *Ann. Inst. Fourier*, 54 (3) (2004), 773-786.



Revisitando o algoritmo LSTRS para o subproblema de região de confiança

Ismael Navarrete Márquez¹

¹Estudante do Mestrado em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, Brasil.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos o algoritmo LSTRS (*Large Scale Trust-Region Subproblems*), criado para resolver subproblemas de região de confiança de grande porte sem fatorações de matrizes. Estudamos as principais características deste método em comparação com outros métodos de região de confiança e realizamos experimentos numéricos para avaliar o desempenho do método nas últimas versões do MATLAB.

Palavras-chave: região de confiança, LSTRS, cálculo de autovalores

Introdução

Na literatura, podemos encontrar uma grande variedade de algoritmos para otimização. Em geral, tais algoritmos precisam de um ponto inicial, denotado por x_0 , que pode ser escolhido pelo usuário ou pode ser gerado pelo próprio algoritmo. A partir deste ponto, o algoritmo gera uma sequência de iterados $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ que acaba quando não pode ter mais melhora, ou quando a solução for aproximada com bastante acurácia. A partir de um iterado x_k ao seguinte, o algoritmo usa informação da função neste iterado e provavelmente dos iterados anteriores para calcular um novo iterado x_{k+1} , no qual a função possui um valor inferior. Existem duas estratégias fundamentais para calcular o novo iterado: *busca linear* e *região de confiança*.

Neste trabalho, vamos nos concentrar na segunda estratégia, *região de confiança*, na qual a informação obtida sobre f é usada para construir uma função modelo m que tem um comportamento similar à função objetivo em torno do ponto x_k , geralmente definida como $m(p) = f + p^T \nabla f + \frac{1}{2} p^T B p$, em que f e ∇f são a função e o gradiente da função no ponto x_k e B pode ser a Hessiana, $\nabla^2 f$, ou uma aproximação dela. Restringimos a busca do minimizador de m a uma região em torno de x_k , geralmente definida como a bola tal que $\|p\| \leq \Delta$, em que $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e Δ é o raio da região de confiança. Uma vez obtido o passo p , o novo iterado é definido como $x_{k+1} = x_k + p$, desde que esse ponto produza um decréscimo suficiente na função objetivo f .

Desenvolvimento

O algoritmo LSTRS, cujas iniciais denotam *Large Scale Trust-Region Subproblems*, de Rojas, Santos e Sorensen [3], foi criado para resolver subproblemas de região de confiança de grande porte sem usar fatorações de matrizes. A condição de otimalidade $(B + \lambda I)p = -g$ pode ser vista como o segundo bloco do problema de autovalores

$$\begin{pmatrix} \theta & g^T \\ g & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}, \quad (0.1)$$

em que θ é um escalar dado e $-\lambda$ é o autovalor que estamos procurando. Normalizamos o autovetor correspondente de modo que a sua primeira componente seja 1. Nosso foco é usar o valor θ como um parâmetro de controle e tentar escolher θ de modo que a solução de (0.1) satisfaça as condições de otimalidade $\lambda \geq 0$, $B + \lambda I$ semidefinida positiva e $\lambda(\|p\| - \Delta) = 0$. Assim, existe um valor de θ para o qual podemos reescrever o problema de minimização

¹ismaelnm14@gmail.com

como

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}y^T B_\theta y \\ \text{s.a.} \quad & y^T y \leq 1 + \Delta^2, e_1^T y = 1, \end{aligned} \quad (0.2)$$

em que e_1 é o primeiro vetor unitário canônico em \mathbb{R}^{n+1} e B_θ é a matriz do lado esquerdo de (0.1). Porém, é possível que a primeira componente do autovetor correspondente a este autovalor tenha valor nulo e não possamos normalizar o vetor para tornar esta primeira componente 1. Esse é o chamado caso difícil, pois g é ortogonal ao conjunto \mathcal{E}_1 de autovetores correspondentes ao autovalor mais à esquerda do *pencil* (B, I) , que pode parecer um defeito da abordagem, mas na verdade não é, pois a dinâmica nos fornece um autovetor adequado em \mathcal{E}_1 também no caso difícil. O algoritmo LSTRS possui uma convergência rápida para ajustar θ tal que $\theta - \lambda = \phi(\lambda)$ e $\phi'(\lambda) = \Delta^2$, onde $\phi(\lambda) = -g^T x$, e $\phi'(\lambda) = x^T x$, com $(B - \lambda I)x = -g$. Também calcula a função $\hat{\phi}$ que interpola ϕ e ϕ' em dois pontos escolhidos adequadamente usando ao máximo as informações disponíveis e calcula, a partir dela, $\hat{\lambda}$, satisfazendo $\hat{\phi}'(\hat{\lambda}) = \Delta^2$. Os valores de $\hat{\lambda}$ e $\hat{\phi}(\hat{\lambda})$ são usados para atualizar o parâmetro θ e calcular o iterado seguinte $\{\lambda, x\}$. No algoritmo, utilizam-se salvaguardas para a sequência em θ , visando assegurar convergência global; ademais, é usada a informação do segundo menor autovalor da matriz B_θ . Será necessário inicializar adequadamente este parâmetro para obter um bom desempenho do método e estabelecer um intervalo de salvaguarda adequado. Finalmente, são estabelecidos critérios de parada para que o algoritmo seja interrompido quando se acha uma solução com a acurácia desejada (seja interior, na borda da região de confiança, ou quase-ótima), quando se alcança um número máximo de iterações ou quando o intervalo de salvaguarda para θ é muito pequeno. Na presença do caso difícil, não é necessário combinar esquemas interpoladores distintos, nem mudar para outro algoritmo. Assume-se que o vetor g é não-nulo. Se $g = 0$, o problema se reduz em resolver um problema de autovalores para o menor autovalor de B .

Para mostrar diferentes aspectos do método LSTRS, foram realizados diversos experimentos numéricos. Devido às atualizações recentes do MATLAB, foi necessária uma atualização dos códigos apresentados em [3] para funcionar na versão 2017B. Realizaram-se 4 conjuntos de experimentos para validar se as mudanças foram bem-sucedidas. No primeiro experimento, estudou-se a sensibilidade do LSTRS para diferentes valores de tolerância para a norma da solução da região de confiança e, no segundo, para diferentes valores do raio da região para problemas onde o caso difícil não está presente. No terceiro experimento, estudou-se a taxa de convergência local superlinear. Por fim, no quarto experimento mostrou-se o comportamento do LSTRS no caso difícil.

Considerações Finais

Nos experimentos numéricos realizados, pode-se comprovar como o desempenho do algoritmo LSTRS foi melhor que nos experimentos realizados em [3]. Este melhor desempenho se deve, em grande parte, às últimas atualizações da função `eigs`, e mesmo sem conseguir introduzir todos os parâmetros de controle para o cálculo dos autovalores e autovetores apresentados em [3], conseguimos uma redução notável na quantidade de produtos matriz-vetor e de iterações necessárias para resolver o problema. Em alguns casos, a redução de produtos matriz-vetor foi de 70%, sem que isso afetasse a acurácia do cálculo da solução apresentada pelo método. Pode-se esperar que, se conseguirmos introduzir os parâmetros de controle restantes, o desempenho seja ainda melhor.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrew R. Conn, Nicholas I. M. Gould, e Philippe L. Toint. *Trust Region Methods*. SIAM, 2000.
- [2] Jorge Nocedal e Stephen J Wright. *Numerical Optimization, 2nd Edition*. Springer, 2006.
- [3] Marielba Rojas, Sandra A. Santos, e Danny C. Sorensen, A new matrix-free algorithm for the large-scale trust-region subproblem, *SIAM Journal on Optimization*, 11(3), pp. 611-646, 2000. DOI: 10.1137/S105262349928887X.

Sapos em árvores? Condições para a transição de fase

Jaime Utria¹, Élcio Lebensztayn²,

^{1,2}Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Resumo

Neste trabalho estudamos um sistema de passeios aleatórios simples em um grafo infinito, conectado e localmente finito, conhecido na literatura como o *modelo dos sapos*. Estabelecemos condições para o modelo exibir transição de fase entre extinção e sobrevivência quando o grafo onde os passeios aleatórios ocorrem é uma árvore não homogênea.

Palavras-chave: passeios aleatórios simples, árvore não homogênea, probabilidade crítica, percolação.

Referências Bibliográficas

- [1] O.S.M. ALVES, F.P. MACHADO, AND S. YU. POPOV. *Phase transition for the frog model*. EJP (2002), 7:1-21.
- [2] E. LEBENSZTAYN, F.P. MACHADO, AND S. YU. POPOV. *An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees*. J. Stat. Phys. (2005), 119(1-2):331-345.
- [3] S. YU. POPOV. *Frogs and some other interacting random walks model*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. (2003), AC:277-288.

¹jutria@ime.unicamp.br

²lebensztayn@ime.unicamp.br

Segmentação de Imagens com Campos Aleatórios Markovianos Ocultos

Victor Freguglia¹, ¹Departamento de Estatística, IMECC - UNICAMP

Resumo

São apresentados os modelos de Campos Aleatórios Markovianos e o caso particular para dados em reticulados, como imagens. Consideramos então imagens cuja intensidade em cada pixel é de uma mistura finita de distribuições Gaussianas, tais que as classes (latentes) são uma realização de um Campo Aleatório Markoviano finito. A dependência entre as classes não observáveis faz com que seja necessário o uso de técnicas sofisticadas para a estimação e segmentação da imagem pelas classes estimadas.

A qualidade da segmentação é comparada com o caso de independência em simulações, onde ficam claras as vantagens da inclusão de informação espacial na estimação, e, por fim, os métodos são aplicados em um problema real.

Palavras-chave: Campos aleatórios Markovianos, campos ocultos, segmentação de imagem.

Introdução

Em diversos processos estocásticos, variáveis não são observadas com uma ordenação natural, como sequências, mas a propriedade de Markov (independência condicional, em relação a algum tipo de vizinhança) se faz presente. Em tais casos, podemos representar a estrutura de dependência desses processos através de um grafo, onde os vértices representam as variáveis e as arestas a dependência. São os chamados Campos Aleatórios Markovianos. Dados de imagens são um caso particular, onde cada pixel pode ser visto como um vértice do grafo e algum tipo de padrão é criado para determinação da estrutura de dependência, por exemplo, arestas apenas entre os vizinhos mais próximos.

Desenvolvimento

Seja $\mathbb{X} = \{X_{i,j}, (i,j) \in \mathcal{J}\}$ um Campo Aleatório Markoviano em um reticulado \mathcal{J} assumindo valores em \mathcal{C} e $Y = \{Y_{i,j}(i,j) \in \mathcal{J}\}$, tal que

$$f(y_{i,j}|\mathbb{X} = x) = f(y_{i,j}|X_{i,j} = x_{i,j}) = \prod_{c \in \mathcal{C}} \left(\frac{1}{\sigma_c \sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(y_{i,j} - \mu_c)^2}{2\sigma_c^2} \right] \right)^{I_{x_{i,j}=c}}, \quad (0.3)$$

isso é, $Y_{i,j}|X_{i,j} = c \sim N(\mu_c, \sigma_c^2)$, e $Y_{i,j}|X_{i,j}$ independente $Y_{i',j'}|X_{i',j'}$. O problema da segmentação de imagens consiste em estimar os valores do campo latente \mathbb{X} .

Caso o campo oculto \mathbb{X} tivesse pixels independentes entre si, esse seria um problema clássico de estimação de misturas, facilmente resolvido através do uso do algoritmo E-M. No passo E, é necessário o cálculo da esperança condicional de uma função de \mathbb{X} , envolvendo calcular $|\mathcal{C}||\mathcal{J}|$ probabilidades condicionais. Sem a hipótese de independência, essa esperança condicional envolve todas as combinações possíveis para \mathbb{X} conjuntamente, totalizando $|\mathcal{C}||\mathcal{J}|$ probabilidades condicionais. Zhang *et. al* utilizam uma versão do algoritmo E-M com a Pseudo-Verossimilhança e uma estimação iterativa das classes, o que faz com que a solução tenha complexidade computacional similar à do caso de independência.

A comparação entre métodos de segmentação considerando a estrutura de dependência de \mathbb{X} e sob a hipótese de independência é feita através de simulações em diversos cenários. A diferença na qualidade das estimativas pela

¹victorfreguglia@gmail.com

inclusão da dependência, depende principalmente, de quão bem "separadas" são as densidades da mistura. Também são apresentadas aplicações em dados reais, para segmentação de tecidos do cérebro em imagens de ressonância magnética (MRI).

Estrutura da Apresentação

- Noções e definições gerais sobre grafos: vizinhanças, cliques, etc.
- Campos Aleatórios Markovianos em grafos: Propriedades, desafios, etc.
- Imagens como grafos com vértices no reticulado e estruturas de vizinhança
- Exemplos para diferentes configurações de estruturas de interações.
- Campos Markovianos Ocultos: Definição e características.
- Estimação via E-M e Pseudo-verossimilhança.
- Estimação pela abordagem Bayesiana (dependendo do andamento).
- Simulações, resultados e comparações em diversos casos.
- Aplicação em dados de MRI.
- Comentários sobre aplicação em imagens com texturas.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Freguglia. *Modeling Textile Images with Markov Random Fields*. 2018.
- [2] Y. Zhang, M. Brady & S. Smith. *Segmentation of brain MR images through a hidden Markov random field model and the expectation-maximization algorithm*. *IEEE transactions on medical imaging*, 20(1), 45-57. 2001.

Topological Methods in the Study of Differential Equations

Francisco B. G. da Silva¹, Douglas D. Novaes²,

^{1,2}Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, Brasil

Abstract

In this work we are interested in studying the periodic orbits of differential systems of the form

$$x' = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (0.4)$$

by using the Averaging Theory and topological tools such as the Brouwer and the Coincidence degree. The main results state that under reasonably weak conditions the periodic orbits of system (0.4) persist for ε sufficiently small.

Keywords: periodic orbits, Brouwer degree, coincidence degree, Averaging Theory.

Introduction

For systems like (0.4) there are well known theorems regarding the persistence of periodic orbits (see [3] and [4], for instance). However, the aforementioned theorems require the vector fields to be very smooth. In [1], it is proven by means of the Brouwer degree that only the continuity and locally Lipschitz condition are necessary. They also prove, using the coincidence degree, that the same conclusion holds without the Lipschitz condition.

Main Definitions and Results

The Brouwer degree definition and main properties are given in the following theorem.

Teorema 8.3 Let $X = \mathbb{R}^n = Y$ for some positive integer n , $f : \bar{V} \subset X \rightarrow Y$ a continuous function on \bar{V} , where V is a bounded open subset of X and $y_0 \in Y$ such that $y_0 \notin f(\partial V)$. For each triple (f, V, y_0) there corresponds and integer $d_B(f, V, y_0)$ satisfying the following conditions:

1. If $d_B(f, V, y_0) \neq 0$, then $y_0 \in f(V)$. Furthermore, if $f_0 : X \rightarrow Y$ is the identity function of X onto Y , then for any bounded open subset $V \subset X$ we have

$$d_B(f_0|_V, V, y_0) = 1.$$

2. (Additivity) If $V_1, V_2 \subset V$ are disjoint open subsets of V such that $y_0 \notin f(\bar{V} \setminus (V_1 \cup V_2))$, then

$$d_B(f, V, y_0) = d_B(f|_{V_1}, V_1, y_0) + d_B(f|_{V_2}, V_2, y_0).$$

3. (Invariance under Homotopy) Consider a homotopy $\{f_t : \bar{V} \rightarrow Y | t \in [0, 1]\}$. Let $y_t \in Y | t \in [0, 1]$ be a continuous curve in Y such that $y_t \notin f_t(\partial V), \forall t \in [0, 1]$. Then $d_B(f_t, V, y_t)$ is constant in t .

¹franciscobrunogs@yahoo.com.br

²ddnovaes@ime.unicamp.br

Teorema 8.4 Consider the differential system in (0.4) where $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ are continuous functions, T -periodic in the first variable and D is an open subset of \mathbb{R}^n . Define

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds \quad (0.5)$$

and assume that F_1 and R are Locally Lipschitz in the second variable and that for $a \in D$ satisfying $f_1(a) = 0$, there exists a neighborhood V of a such that $\bar{V} \subset D$, $f_1(z) \neq 0, \forall z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ and $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$. Then for $|\varepsilon| > 0$ sufficiently small there exists a T -periodic solution $\varphi(t, \varepsilon)$ to (0.4) such that $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

The coincidence degree is defined as follows

Definição 8.5 If L is a linear Fredholm operator of index 0, N is an L -Compact operator and $0 \notin (L - N)(\partial\Omega \cap \text{dom } L)$, then the Leray-Schauder degree, $d_{LS}(I - M, \Omega, 0)$, is defined and thence we define the coincidence degree of the pair (L, N) with respect to 0 as $d((L, N), 0) = d_{LS}(I - M, \Omega, 0)$, where $M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})N$.

We aim at proving the following theorem

Teorema 8.6 [[1]] Consider the differential system (0.4) where $F_1 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ are continuous functions, T -periodic in the first variable and D is an open subset of \mathbb{R}^n . Define

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds$$

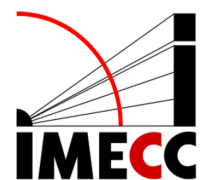
and assume that for $a \in D$ satisfying $f_1(a) = 0$, there exists a neighborhood V of a such that $\bar{V} \subset D$, $f_1(z) \neq 0, \forall z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ and $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$. Then for $|\varepsilon| > 0$ sufficiently small there exists a T -periodic solution $\varphi(t, \varepsilon)$ to (0.4) such that $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Buică, and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bulletin des sciences mathematiques*, 2004.
- [2] R. E. Gaines, and J. L. Mawhin. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1977.
- [3] J. A. Sanders, and F. Verhulst, and J. Murdock. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York. 2017
- [4] J. Llibre, and D. D. Novaes, and M A. Teixeira. Higher Order Averaging Theory for Finding Periodic Solutions Via Brouwer Degree. *Nonlinearity*. 2014



Encontro Científico dos Pós-Graduandos do



9. Pôsteres

Use os links abaixo para navegar nos Pôsteres

- Caracterização de difeomorfismos de Anosov transitivos através da teoria de sombreamento no limite bilateral (Mayara Braz Antunes)
- Codimensões em Representações de Álgebras de Lie (David Levi da Silva Macêdo)
- Estabilidade Exponencial para um Sistema Termo-viscoelástico de Timoshenko (Sandro Bernardes Pinheiro)
- Existência e unicidade de solução de um modelo de Timoshenko com história e lei de Cattaneo/Fourier (Guilherme de Martini)
- Existência, Unicidade e Estabilidade de Solução para um Sistema de Timoshenko Termoelástico (Saulo Rodrigo Medrado)
- Método para calcular o Polinômio interpolador de Lagrange para números fuzzy Iterativos (Geizane Lima da Silva)
- Modelagem Condicional de Valores Extremos: Uma aplicação a dados hidrológicos (Anderson Almeida Azevedo)
- Operadores multilineares são uniformemente contínuos sobre limitados (Luis A. Garcia)
- Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes: Estabilidade Global (Mayara Duarte de Araujo Caldas)
- Teorema de Hadamard-Perron, Difeomorfismos de Anosov (Marcelis Espitia Noriega)
- Usando a Álgebra Geométrica Conforme para Determinar a Estrutura de Proteínas com Incertezas (Marcelo Santos Carielo)

Caracterização de difeomorfismos de Anosov transitivos através da teoria de sombreamento no limite bilateral

Mayara Braz Antunes¹, ¹Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Resumo

O objetivo é apresentar uma classe importante em Sistemas Dinâmicos conhecida como difeomorfismos de Anosov. Estes sistemas são modelos para diversos comportamentos dinâmicos e por isso foram intensamente estudados, principalmente a partir da década de 60. Apesar disso, perguntas muito naturais ainda não foram completamente respondidas para estas preciosidades, como a conjectura dada por Smale que sugere que todo difeomorfismo de Anosov é transitivo. Para alguns casos particulares de difeomorfismo de Anosov este problema está resolvido, como por exemplo para difeomorfismos de Anosov que tem propriedade de produto global. Caracterizaremos os difeomorfismos de Anosov com tal propriedade e com propriedade de transitividade através da teoria de sombreamento no limite bilateral.

Palavras-chave: Difeomorfismos de Anosov, produto global, transitividade, sombreamento no limite.

Introdução/Desenvolvimento

Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é dito um difeomorfismo de Anosov se para todo $x \in M$, existe uma decomposição em soma direta do espaço tangente $T_x M$ em dois subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ invariantes pela derivada Df_x e tal que Df_x restrito a $E^s(x)$ é uma contração uniforme e Df_x restrito a $E^u(x)$ é uma expansão uniforme. Algumas estruturas geométricas, conhecidas como folheações estável e instável, estão naturalmente associadas a estes difeomorfismos, estas estruturas auxiliam enormemente o estudo dinâmico dos difeomorfismos de Anosov. Dado $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de Anosov, para cada $x \in M$, definimos a variedade estável e variedade instável respectivamente como sendo os conjuntos:

$$W^s(x) = \left\{ y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\},$$

$$W^u(x) = \left\{ y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0 \right\}.$$

Esses conjuntos são de fato variedades e além disso, $T_x M(W^s(x)) = E^s(x)$ e $T_x M(W^u(x)) = E^u(x)$. O conjunto de todas as variedades estáveis forma uma folheação para M que chamamos de folheação estável, analogamente obtemos a folheação instável. As variedades estáveis e instáveis "dispõem em camadas" o comportamento assintótico das iteradas futuras e passadas por f .

Os difeomorfismos de Anosov são modelos para diversos comportamentos dinâmicos e por isso foram intensamente estudados, principalmente a partir da década de 60. Apesar disso, perguntas muito naturais ainda não foram completamente respondidas para esses sistemas. Dois clássicos problemas em abertos são:

Conjectura de Smale. Todo difeomorfismo de Anosov é transitivo.

Através da teoria de sombreamento, Carvalho em [1] consegue uma equivalência entre a propriedades de transitividade para difeomorfismos de Anosov com a propriedade de sombreamento no limite bilateral. Mais especificamente, uma *pseudo-órbita no limite bilateral* em M para um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é uma sequência $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{|i| \rightarrow \infty} d(f(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

¹mayara.b.antunes@gmail.com

Uma pseudo-órbita no limite bilateral $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é *sombreada no limite bilateral* por um ponto $y \in M$ se

$$\lim_{|i| \rightarrow \infty} d(x_i, f^i(y)) = 0.$$

Dizemos que f tem a *propriedade de sombreado no limite bilateral* se toda pseudo-órbita no limite bilateral $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ é sombreada no limite bilateral. Se para cada pseudo-órbita no limite bilateral seu sombreado no limite bilateral é único, dizemos que f tem a *propriedade de sombreado único no limite bilateral*.

Carvalho em [1] trabalha com o levantamento dos difeomorfismos de Anosov para o recobrimento universal. Denotando $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ o levantamento do difeomorfismo de Anosov $f : M \rightarrow M$ para o recobrimento universal, o autor mostra que, para cada pseudo-órbita no limite bilateral para \tilde{f} , existem aplicações definidas em um determinado espaço de Banach que relacionam bijetivamente seus pontos fixos a pontos que sombream esta dada pseudo-órbita.

Os levantamentos das variedades estável e instável para o recobrimento universal, os quais denotamos por $\tilde{W}^s(x)$ e $\tilde{W}^u(x)$ são de fato as variedades estável e instável para \tilde{f} . Quando para quaisquer $x, y \in M$ tem-se que a interseção $\tilde{W}^s(x) \cap \tilde{W}^u(y)$ é um único ponto, dizemos que f é um difeomorfismo de Anosov com estrutura de produto global.

Através dos teoremas a seguir obtemos relações entre propriedades de sombreado no limite, transitividade e estrutura de produto global.

Teorema A.[1] Um difeomorfismo de Anosov tem estrutura de produto global se, e somente se, um levantamento para o recobrimento universal tem a propriedade de sombreado único no limite bilateral.

Teorema B.[1] Um difeomorfismo de Anosov é transitivo se, e somente se, tem propriedade de sombreado no limite bilateral.

Depois de enunciados os teoremas acima é natural nos perguntarmos:

"Todo difeomorfismo de Anosov tem estrutura de produto global é transitivo?"

A resposta para tal pergunta é afirmativa. Uma prova simples para este resultado podemos obter usando simplesmente a definição e conhecimento de teoria básica de sistemas dinâmicos.

Referências Bibliográficas

- [1] Bernardo Carvalho. Hyperbolicity, transitivity and the two-sided limit shadowing property. Proc. Amer. Math.Soc., 143(2):657–666, 2015.

Codimensões em Representações de Álgebras de Lie

David Levi da Silva Macêdo¹,

¹IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brazil

Resumo

Uma das características mais importantes de uma PI-álgebra A é a sua sequência de codimensões $\{c_n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Nesse sentido, estuda-se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ conhecido como expoente de A . Amitsur conjecturou que, sobre um corpo de característica 0, o expoente existe e é um inteiro não negativo. Tal conjectura foi demonstrada por Giambruno e Zaicev para álgebras associativas, em 1999. Análogo da conjectura de Amitsur vale também para álgebras de Lie de dimensão finita, o que foi obtido por Zaicev em 2002. Recentemente Gordienko obteve um análogo desses resultados para identidades de representações de álgebras de Lie (também chamadas de identidades fracas).

Nesse sentido, exporemos tais resultados a respeito da conjectura de Amitsur obtidos por Giambruno, Zaicev e Gordienko, nas suas respectivas classes de álgebras. Além disso, apresentaremos algumas classificações com relação a sequência de codimensões ser limitada polinomialmente.

Palavras-chave: PI-álgebra, codimensões, expoente.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Giambruno and M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, AMS, Mathematical Surveys and Monographs Vol. **122**, Providence, R.I., 2005.
- [2] A. S. Gordienko, *Codimensions of polynomial identities of representations of Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (10) (2013), 3369–3382.
- [3] M. Zaicev. *Integrality of exponents of growth of identities of finite-dimensional Lie algebras*. Izv. Math. **66**, 463-478 (2002).

¹ra180514@ime.unicamp.br

Estabilidade Exponencial para um Sistema Termo-viscoelástico de Timoshenko

Sandro Bernardes Pinheiro¹, Marcio A. Jorge da Silva²

¹Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Brasil.

²Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Brasil.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo de um sistema de Timoshenko com acoplamentos térmico na força cortante e viscoelástico no momento fletor. A lei constitutiva para a condução do calor é dada pela teoria de Green e Naghdi, a qual é denominada termoelasticidade do tipo III. Será utilizada a teoria de semigrupos lineares para determinar a existência, unicidade e estabilidade exponencial de solução para o problema, o qual foi introduzido em [2] sem a prova de existência e estabilidade.

Palavras-chave: Sistema de Timoshenko, Termoelasticidade, Memória, Estabilidade Exponencial.

Introdução

Neste trabalho consideramos o seguinte problema termo-viscoelástico de Timoshenko:

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \sigma \theta_{tx} = 0 \text{ em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \beta \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - b \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds - \sigma \theta_t = 0 \text{ em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \gamma \theta_{xxt} + \sigma(\varphi_x + \psi)_t = 0 \text{ em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ \eta_t + \eta_s = \psi_t \text{ em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (0.1)$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \eta(x, 0, s) = \eta_0(x, s), \quad \eta(x, t, 0) = 0, \quad x \in (0, L), \quad s > 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (0.2)$$

e condições de fronteira

$$\begin{cases} \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ \eta(0, t, s) = \eta(L, t, s) = 0, \quad t \geq 0, \quad s > 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ e $\theta = \theta(x, t)$ representam, respectivamente, o deslocamento transversal de uma viga, o ângulo de rotação de uma seção transversal e a diferença de temperatura na coordenada x e instante t de uma viga de comprimento $L > 0$. A função $\eta = \eta(x, t, s)$ é chamada de história de deslocamento relativo, sendo definida a partir de ψ , onde seguimos as ideias introduzidas em [1]. A função g é chamada de núcleo da memória, sendo considerada uma função integrável e de classe C^1 sobre $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ tal que $0 < \int_0^\infty g(s) ds < 1$ e $g(s) \leq -k_1 g'(s)$, $s \in \mathbb{R}^+$, para algum $k_1 > 0$. Além disso, as constantes do sistema (0.1) são assumidas positivas, isto é, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \delta, \beta, b, k, \gamma, \sigma > 0$.

¹sandrobernardespinoheiro@gmail.com

²marcioajs@uel.br

Existência e Unicidade

A ideia é reescrever o problema (0.1)-(0.3) como um PVI abstrato de primeira ordem. Para isso, denotamos $\Phi = \varphi$, $\Psi = \psi$, $\Theta = \theta$, a função vetorial $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta, \eta)$ e o espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M},$$

onde $\mathcal{M} := \{\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1(0, L) \mid \int_0^\infty g(s) \|\eta\|_{H_0^1(0, L)}^2 ds < \infty\}$. Assim, podemos converter (0.1)-(0.3) no seguinte problema de Cauchy Abstrato:

$$\begin{cases} U_t = AU, & t > 0, \\ U(0) = U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1, \eta_0), \end{cases} \quad (0.4)$$

onde $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido como em [2], para todo U no domínio

$$D(A) = \left\{ U \in \mathcal{H} \mid \Phi, \Psi, \Theta \in H_0^1(0, L), \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0, \right. \\ \left. \varphi, \delta\theta + \gamma\Theta, \beta\psi + b \int_0^\infty g(s)\eta(s)ds \in H^2(0, L) \right\}.$$

Com hipóteses e notações anteriores, mostra-se que A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e, conseqüentemente, podemos aplicar a teoria de semigrupos lineares, ver por exemplo Pazy [2], para concluir o seguinte resultado:

Teorema 9.1 Sob as hipóteses e notações acima, se $U_0 \in D(A)$, então o problema (0.4) possui uma única solução na classe

$$U \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1((0, \infty), \mathcal{H}),$$

a qual é dada por $U(t) = S(t)U_0$.

Estabilidade Exponencial

Com as hipóteses e notações anteriores, os autores sugerem em [2] que a estabilidade exponencial do sistema (0.1)-(0.3), mais precisamente do semigrupo $S(t)$ correspondente ao problema (0.4), depende de uma relação entre os coeficientes, a saber, que $\chi := \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0$. No presente trabalho, o propósito foi remover essa hipótese, mostrando que a estabilidade exponencial do semigrupo $S(t)$ não depende de relação alguma entre os coeficientes das equações do sistema (0.1). Para tanto, usando o Teorema de Prüss (ver por exemplo [3]), basta mostrar as seguintes propriedades $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ e $\overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$. Com isto, temos o seguinte resultado de estabilidade:

Teorema 9.2 Sob as hipóteses do Teorema 9.1, então o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ correspondente ao problema (0.4) é exponencialmente estável, ou seja, existem $C, w > 0$ tais que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-wt}$ para todo $t > 0$.

Em outras palavras, o sistema (0.1)-(0.3) é exponencialmente estável independente das relações entre os coeficientes.

Agradecimentos.

O primeiro autor agradece a CAPES pelo suporte financeiro.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Grasselli and V. Pata, *Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory*, Progr. Nonlinear Differ Equ Appl. 50 (2002), 155-178.

- [2] M. L. Santos and D.S. Almeida Júnior, *On Timoshenko-type systems with type III thermoelasticity: Asymptotic behavior*, J. Math. Anal. Appl. 448 (2017), 650-671.
- [3] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Chapman & Haal/CRC Research Notes in Mathematics v. 398, Boca Raton, FL, 1999.
- [4] A. Pazy, *Semigroups of Linears Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer New York, 1983.



Existência e unicidade de solução de um modelo de Timoshenko com história e lei de Cattaneo/Fourier

Guilherme de Martini¹, Michele de Oliveira Alves²

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Paraná, Brasil

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de solução para um sistema de Timoshenko com história considerando as leis de Cattaneo e Fourier para o fluxo de calor. Utilizamos a teoria de semigrupos lineares para verificar os resultados apresentados em [3].

Palavras-chave: Sistema de Timoshenko, lei de Cattaneo, lei de Fourier, semigrupos lineares.

Timoshenko com história e lei de Cattaneo/Fourier

O sistema de Timoshenko é um sistema de equações diferenciais parciais que retrata a vibração de uma viga considerando o deslocamento transversal e o ângulo de rotação. A primeira versão deste sistema apresentada pelo engenheiro Sthephen Prokofievich Timoshenko em [4] é dada por

$$\begin{aligned}\rho A \varphi_{tt} &= S_x, \\ \rho I \psi_{tt} &= M_x - S,\end{aligned}\tag{0.5}$$

onde $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$ denotam, respectivamente, o deslocamento vertical e o ângulo de rotação da viga na posição x e no instante t . Além disso, ρ é uma constante de densidade da massa, A representa a área de uma seção transversal da viga, I o momento de inércia da seção, S a força de cisalhamento e M o momento fletor. Consideraremos a lei constitutiva termoviscoelástica para o momento fletor M e a lei constitutiva elástica para a força de cisalhamento S , conhecidas por

$$S = \tilde{k}GA(\varphi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = EI\psi_x - \int_0^\infty g(s)\psi_x(t-s)ds - \delta\theta,\tag{0.6}$$

em que \tilde{k} representa um fator de correção de cisalhamento, G e E denotam os módulos de cisalhamento e elasticidade de Young, respectivamente, δ é uma constante de acoplamento térmico, $\theta = \theta(x, t)$ representa a variação de temperatura na coordenada x e no instante t e, por fim, g é conhecida como núcleo de memória. Substituindo (0.6) em (0.5) e adotando a notação: $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = \tilde{k}GA$ e $b = EI$ obtemos o seguinte sistema de Timoshenko com memória

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0.\end{aligned}\tag{0.7}$$

Para este modelo, consideramos a equação de propagação de calor

$$\rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0,\tag{0.8}$$

na qual, a função $q = q(x, t)$ designa o fluxo de calor e ρ_3 é uma constante positiva. Além disto, consideramos uma equação que descreve a relação entre o fluxo de calor q e a temperatura θ , mais precisamente, a lei térmica de Cattaneo, dada por

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0.\tag{0.9}$$

¹guilhermedemartini@live.com

²michelealves@uel.br

Nosso principal objetivo é utilizar a teoria de semigrupos lineares para verificar a existência e unicidade de solução para o sistema (0.7)-(0.9). Para isto, utilizaremos um argumento introduzido por Dafermos em [1], definindo uma nova variável, a saber

$$\eta(x, t, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t - s), \quad x \in (0, l), \quad t, s \geq 0, \quad (0.10)$$

também conhecida como história de deslocamento relativo. Desta forma, procedendo com o sistema de equações (0.7)-(0.9) e, considerando a variável definida em (0.10), obtemos um modelo de Timoshenko com história e lei de Cattaneo, descrito por

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \tilde{b} \psi_{xx} - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}(s) ds + k(\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x &= 0, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{xt} &= 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x &= 0, \\ \eta_t + \eta_s - \psi_t &= 0, \end{aligned} \quad (0.11)$$

onde $\tilde{b} = b - b_0$ e $b_0 = \int_0^\infty g(s) ds$. As condições iniciais e de fronteira são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \\ q(\cdot, 0) = q_0, \quad \eta(\cdot, 0, s) = \psi_0 - \psi(\cdot, -s) =: \eta_0(\cdot, s) \quad \text{em } (0, l), \quad s \geq 0, \end{aligned} \quad (0.12)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_x(0, \cdot) = \varphi_x(l, \cdot) = \psi(0, \cdot) = \psi(l, \cdot) = q(0, \cdot) = q(l, \cdot) = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \\ \text{e } \eta(\cdot, \cdot, 0) = \lim_{s \rightarrow 0} \eta(\cdot, \cdot, s) = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty). \end{aligned} \quad (0.13)$$

Neste trabalho usamos a teoria de semigrupos de operadores lineares (ver [2]) para ir de encontro com os resultados apresentados em [3], provando a existência e unicidade de solução do problema (0.11)-(0.13). Além disso, provamos resultados similares para o caso $\tau = 0$ em (0.9), onde obtemos um modelo de Timoshenko com história e lei de Fourier.

Referências Bibliográficas

- [1] C. M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Archive for rational mechanics and analysis*, 1970. DOI: 10.1007/BF00251609.
- [2] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.
- [3] H. D. F. Sare and R. Racke. On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2009. DOI: 10.1007/s00205-009-0220-2.
- [4] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1921. DOI: 10.1080/14786442108636264.

Existência, Unicidade e Estabilidade de Solução para um Sistema de Timoshenko Termoelástico

Saulo Rodrigo Medrado¹, Marcio A. Jorge da Silva²,

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil.

Resumo

O sistema vigas de Timoshenko é um sistema de equações diferenciais parciais deduzidas pelo engenheiro Stephen P. Timoshenko que descreve a vibração de uma viga fina levando em consideração o deslocamento vertical e ângulo de rotação. Neste trabalho faremos a releitura dos artigos [1] e [3] que tratam da estabilidade do sistema de vigas de Timoshenko com lei térmica de Cattaneo. Para uma abordagem mais completa, também será apresentado o resultado de existência e unicidade de solução usando teoria de semigrupos lineares, conforme [2].

Palavras-chave: Timoshenko, existência, unicidade, estabilidade.

Introdução

Para descrever o comportamento de uma viga, segundo Timoshenko, considere o deslocamento transversal ϕ e ângulo de rotação ψ de uma seção transversal com relação a seção normal. Denotando por $\phi = \phi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$ onde $x \in [0, l]$, l sendo o comprimento da viga e $t \geq 0$ o tempo, temos as equações de momento (ver [4])

$$\rho A \phi_{tt} = S_x \quad \text{e} \quad \rho I \psi_{tt} = M_x - S, \quad (0.14)$$

onde ρ é a densidade de massa, A e I representam a área e o momento de inércia de uma seção transversal da viga, S é a força de cisalhamento e M o momento fletor. No caso não isotérmico, ou seja, onde há interferência de calor, então de acordo com [1, 3] pode-se considerar as seguintes leis constitutivas para S e M

$$S = k' GA(\phi_x + \psi) \quad \text{e} \quad M = EI\psi_x + \delta\theta, \quad (0.15)$$

em que k' é um fator de correção do cisalhamento, G e E denotam os módulos de cisalhamento e elasticidade de Young, δ uma constante de acoplamento térmico e $\theta = \theta(x, t)$ a variação de temperatura. Todas as constantes são fisicamente positivas. Substituindo (0.15) em (0.14) e denotando as constantes por $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = k' GA$, $b = EI$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x &= 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta\theta_x &= 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty). \end{aligned} \quad (0.16)$$

A equação que descreve a propagação de calor no sistema é dada por

$$\rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_x = 0, \quad (0.17)$$

onde $q = q(x, t)$ representa o fluxo de calor. Além disso, a relação entre o fluxo de calor $q(x, t)$ e a temperatura $\theta(x, t)$ é dada pela Lei Térmica de Cattaneo como segue

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \quad (0.18)$$

¹saulo_medrado@hotmail.com. O autor agradece a CAPES/Fundação Araucária pelo suporte financeiro.

²marcioajs@uel.br.

onde τ é o fator que descreve o tempo de retardo na resposta do fluxo de calor ao gradiente de temperatura e $\beta > 0$. Assim, de (0.16)-(0.18), segue o sistema termoelástico de Timoshenko com lei térmica de Cattaneo

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (0.19)$$

o qual é estudado com condições iniciais e de fronteira

$$\phi(\cdot, 0) = \phi_0, \phi_t(\cdot, 0) = \phi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \theta(\cdot, 0) = \theta_0, q(\cdot, 0) = q_0 \quad \text{em } (0, l), \quad (0.20)$$

$$\phi(0, t) = \phi(l, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (0.21)$$

Resultados

Denotando $\phi_t = \Phi$, $\psi_t = \Psi$ e $U = (\phi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T$, então o problema (0.19)-(0.21) pode ser convertido no seguinte problema de Cauchy abstrato equivalente

$$U_t = AU, \quad t > 0, \quad U(0) := U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)^T, \quad (0.22)$$

onde $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} & 0 & -\frac{\delta}{\rho_2} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{\rho_3} \partial_x & 0 & -\frac{\beta}{\rho_3} \partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \partial_x & -\frac{\beta}{\tau} \end{bmatrix},$$

com domínio $D(A)$ e espaço de fase \mathcal{H} definidos como em [1]. Com isto, prova-se que A é um gerador infinitesimal de um c_0 -semigrupo de contrações em \mathcal{H} , de onde segue o resultado de existência e unicidade:

Teorema 9.3 Se $U_0 \in D(A)$, então o problema (0.22) possui uma única solução $U \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H})$, dada por $U(t) = e^{At} U_0$.

Com respeito a estabilidade do sistema (0.22), assim como em [3], provaremos que a mesma depende do seguinte número $\chi_0 := \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 k}\right) \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{k}\right) - \frac{\tau\rho_1 \delta^2}{\rho_3 k}$. Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

Teorema 9.4 Sob as notações anteriores, temos:

- (i) O problema (0.22) é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi_0 = 0$.
- (ii) No caso geral em que $\chi_0 \neq 0$, então o problema (0.22) é polinomialmente estável.

Referências Bibliográficas

- [1] H. D. Fernández Sare and R. Racke, On the Stability of Damped Timoshenko Systems: Cattaneo Versus Fourier Law, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 194 (2009) 221-251.
- [2] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2012.

-
- [3] M. L. Santos and D. S. Almeida Júnior and J. E. Muñoz Rivera, The stability number of the Timoshenko system with second sound, *J. Differential Equations*, 253 (2012) 2715-2733.
- [4] S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1955.



Método para calcular o Polinômio interpolador de Langrange para números fuzzy Interativos

Geizane Lima da Silva¹, Estevão Esmi Laureano²,

^{1,2} Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, SP.

Abstract

In present work we will realize the interpolation of the fuzzy datas this involved two steps: first the chose the set of interpolations functions and second the extension of the fuzzy fuction given in restrict domínio for the fuzzy fuction given in na largest domínio. We use the method of extension called Sup-J extension principle that generalize the Zadeh Extension Principle. In particular we building the class parametrized of joint distribution definid for any k fuzzy numbers with $k \geq 2$. We will use the characterize of the somation of k interactive fuzzy number atrough of the levels. In present work we will realize the interpolation of the fuzzy dates this involved two steps: first chosen the set of interpolations functions and second the extension of the fuzzy fuction given in restrict domínio for the fuzzy fuction give in na largest domínio. We use the method of extension called Sup-J extension principle that generalize the Zadeh Extension Principle.

Palavras-chave: Summation of k fuzzy numbers, interactive fuzzy numbers, sup-J extension principle, joint possibility distribution, Lagrange interpolation method for interactive fuzzy numbers

Introdução

O primeiro a questionar a respeito da possibilidade de interpolar números fuzzy e obter uma função em números fuzzy foi Zadeh. Em 1984, Lowew [3] provou a existência de uma função de interpolação Lagrangeana para dados Fuzzy. Dez anos depois em 1994, Kaleva, [4], apresentou uma representação dessa interpolação polinomial por meio dos conjuntos de α -níveis, fornecendo um método para calcular o polinômio interpolador de Lagrange Fuzzy. Nesse caso, o polinômio interpolador devido a Lowen, pode ser representado por meio dos α -níveis, tal método é baseado no princípio de extensão de Zadeh. Como sabemos o princípio de extensão de Zadeh deixa brechas, por isso utilizamos um outro princípio que é o princípio de extensão sup-J.

Agora, iremos apresentar uma proposta de interpolador fuzzy para números fuzzy interativos, considerando o somatório intrativo de k números fuzzy.

Desenvolvimento

No caso Fuzzy, o problema de interpolação converte-se no seguinte problema: Seja (A_i, B_i) , $i = 1, \dots, n$ um conjunto de dados Fuzzy, onde $A_i \in L^x$ e $B_i \in L^y$, e considere a função fuzzy $f : A_i \rightarrow B_i$, que tem por domínio o conjunto $\mathcal{M} = \{A_1, \dots, A_n\}$ e seja P o domínio da função fuzzy g , onde $\mathbb{M} \subseteq P \subseteq L^x$. Considere \mathcal{N} um subconjunto de funções fuzzy, escolhido para a interpolação fuzzy. Resolver o problema de interpolação fuzzy, significa encontrar uma função fuzzy $g \in \mathcal{N}$ satisfazendo a condição de interpolação

$$g(A_i) = B_i.$$

Método de interpolação lagrangeana para parâmetros fuzzy interativos

Construiremos uma função de interpolação lagrangeana com parâmetros fuzzy interativos. A construção será feita em termos dos α -níveis.

¹gheyzalima@gmail.com

²eelaureano@ime.unicamp.br

Considere o conjunto de dados, $x_j \in \mathbb{R}$, e as entradas $y_j \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, onde $j = 1 : n$, $\gamma \in [0, 1]$, então

$$L(x) = \gamma \sum_{j=0}^k y_j c_j(x) = y_1 c_1(x) + \gamma y_2 c_2(x) + \gamma \dots + \gamma y_k c_k(x),$$

$$\text{onde } c_j(x) := \prod_{i=0, j \neq i}^k \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)},$$

De acordo com a aritmética para números fuzzy, temos que

$$[C_j]^\alpha = \begin{cases} [c_j y_{j\alpha}^-, c_j y_{j\alpha}^+] & \text{se } c_j \geq 0; \\ [c_j y_{j\alpha}^+, c_j y_{j\alpha}^-] & \text{se } c_j < 0. \end{cases}$$

Portanto, para $A_j = y_j c_j(x)$ temos que

$$[L]^\alpha = [A_1 + \gamma A_2 + \gamma \dots + \gamma A_n]^\alpha = [l_\alpha^-, l_\alpha^+] \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Então, os α -cortes da soma interativa $A_1 + \gamma A_2 + \gamma \dots + \gamma A_n$ são dados por

$$l_\alpha^- = S^-(\alpha, \gamma) \quad l_\alpha^+ = S^+(\alpha, \gamma), \quad \text{onde } S^-(\alpha, \gamma) = \min_i \{S_i^-(\alpha, \gamma)\} \quad \text{e } S^+(\alpha, \gamma) = \max_i \{S_i^+(\alpha, \gamma)\}.$$

para

$$S_i^-(\alpha, \gamma) = \inf_{\beta \geq \alpha} \left\{ (a_{i\beta}^- - \bar{a}_i) + \sum_{j \neq i} (a_{j\beta}^+ - \bar{a}_j) - \gamma \sum_{j \neq i} (a_{j\beta}^+ - a_{j\beta}^-) + \gamma \sum_j^n (a_{j\beta}^- - \bar{a}_j) \right\}.$$

e

$$S_i^+(\alpha, \gamma) = \sup_{\beta \geq \alpha} \left\{ (a_{i\beta}^+ - \bar{a}_i) + \sum_{j \neq i} (a_{j\beta}^- - \bar{a}_j) + \gamma \sum_{j \neq i} (a_{j\beta}^+ - a_{j\beta}^-) + \gamma \sum_j^n (a_{j\beta}^+ - \bar{a}_j) \right\}.$$

Considerações Finais

A extensão Sup-J coincide com a extensão de Zadeh, quando $\gamma = 1$, assim, os resultados obtidos para $\gamma = 1$ coincide com Kaleva em [4].

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, L. C. *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy- Teoria e Aplicação*. Tese (Doutorado), IMECC-Unicamp, Campinas-SP, 1997.
- [2] ESMI, E., SUSSNER, P., IGNÁCIO, G. B. G. Barroso and BARROS, L. C. A parametrized sum of fuzzy numbers with applications to fuzzy initial value problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017.
- [3] LOWEN, R. *Fuzzy Set Theory*, Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [4] KALEVA, O. Interpolation of fuzzy data. *Fuzzy sets and systems*, v. 61, p. 63-70, 1994.
- [5] SUSSNER, P., ESMI, E. and BARROS, L. C. Controlling the Width of the Sum of Interactive Fuzzy Numbers with Applications to Fuzzy Initial Value Problems. *Fuzzy Systems IEEE International Conference on*, p. 1453-1460, 395 2016.
- [6] WASQUES, V.e et al. Arithmetic on Interactive Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 2017(submetido).

Modelagem Condicional de Valores Extremos: Uma aplicação a dados hidrológicos

Andreson Almeida Azevedo¹, Valmária Rocha da Silva Ferraz²

¹IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil

²Departamento de Estatística, Universidade Federal do Piauí, Piauí, Brasil

Resumo

A Teoria dos Valores Extremos tem como principal objetivo o estudo das caudas das distribuições de probabilidade, a fim de mensurar e quantificar eventos extremos de máximo e mínimos. Nesse sentido, em alguns casos é interessante levar em consideração a influência que outras variáveis possam ter sobre a variável de interesse, como na área ambiental o aumento de nível de água de um rio pode influenciar no aumento de outro rio próximo. Nesse sentido, o trabalho de Heffernan e Tawn, 2004, propõe uma abordagem condicional para estimação do modelo multivariado. Inspirado nesse trabalho, propomos aqui um modelo Bayesiano, considerando uma estrutura condicionalmente independente, onde os parâmetros de uma localidade podem ser escritos em forma de uma função linear dos valores das outras localidades.

Introdução

A teoria dos valores extremos tem se destacado por dedicar-se ao estudo das distribuições de máximos e mínimos, que são distribuições com menor ocorrência que eventos médios. porém quando ocorrem tendem a causar grandes perdas financeiras e humanas, portanto a teoria propõe um estudo sobre o comportamento dos dados na cauda da distribuição, muito útil nas áreas ambientais e econômicas. É visível as mudanças climáticas que estão ocorrendo com maior frequência e intensidade nos últimos anos, nesse contexto a teoria é de extrema importância, pois a partir dela se consegue prever a magnitude de um evento extremo e sua ocorrência, para que assim através desses estudos, medidas sejam tomadas para minimizar as perdas que possam ser causadas.

Desenvolvimento

Metodologia

Foram analisados as vazões máximas de 3 Rios de Porto Rico por meio de dois modelos: um modelo de Mistura de Gamas GPD ($MGPD_k$) e por meio de um modelo de Misturas de Gamas GPD com Regressão ($MGPDR_k$). Os parâmetros dessas distribuições foram estimados por meio da Abordagem Bayesiana, utilizando algoritmos MCMC (Markov Chain Monte Carlo) em linguagem OX versão 7. O software R foi utilizado para análise dos resultados obtidos na estimação, como na produção das séries temporais e dos histogramas dos parâmetros.

Resultados

Os dados utilizados na análise fazem referência à vazão dos rios de Porto Rico, são eles: Fajardo, Canóvanas e Espiritu Santo, localizados na região nordeste do País. Vazão é o volume de água que passa por uma área do rio por unidade de tempo. As médias de vazão diária foram disponibilizados pela *National Water Information System*, no

¹andresondez@hotmail.com

²valmaria@ufpi.edu.br

link <http://waterdata.usgs.gov>, uma amostra de 13332 médias que foram coletadas no período de 1967 a novembro de 2003, a partir das médias diárias, tomamos os máximos mensais com o intuito de reduzir a dependência temporal, com isso reduziu-se a 426 observações de vazões mensais para cada rio.

A partir do estudo realizado, constatou-se que as covariáveis do modelo $MGPDR_K$ não têm influência na estimação do parâmetro de forma (ξ), mas têm influência positiva no parâmetro de escala (σ) e no limiar (v) da distribuição para a cauda em todos os rios, e apenas uma componente na mistura de gamas foi necessário para modelar os dados abaixo da cauda, ou seja, do centro da distribuição.

Foi verificado que o modelo de Mistura de Gamas GPD com Regressão $MGPDR_K$ modela melhor os máximos da vazão dos rios que o modelo de Mistura de Gamas $MGPD_K$. Na estimação foi usado 2 componentes na mistura de gamas, no entanto, o algoritmo identificou que apenas um componente é necessário para modelar os dados abaixo da cauda, ou seja, do centro da distribuição, por isso o modelo está definido como $MGPD_1$ e $MGPDR_1$.

Considerações Finais

Pela medida de ajuste BIC, o modelo $MGPDR_1$ foi melhor em todos os rios que o modelo $MGPD_1$, e utilizando o DIC para comparação apenas no rio Espiritu Santo o modelo $MGPD_1$ foi o melhor. A diferença foi pequena, nos levando a concluir que o modelo $MGPDR_1$ é superior ao modelo que considera os parâmetros da cauda fixo ($MGPD_1$), apontando que se existem covariáveis que exercem influência sobre a variável resposta, elas devem ser inseridas no modelo.

Através do modelo é possível avaliar a variação dos parâmetros no tempo e em relação a variação da vazão dos rios próximos ao rio de interesse. Comparando os dados originais com os quantis extremos estimados pelo modelo $MGPDR_1$, foi perceptível que os quantis seguem o mesmo comportamento, o que é um resultado importante para previsão de extremos. O único parâmetro que as covariáveis do modelo não tiveram influência na modelagem da cauda foi o parâmetro de forma.

Referências Bibliográficas

- [1] Coles S. (2001) **Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values**. Springer.
- [2] Ehlers, R. S. **Inferência Bayesiana**, 2007.
- [3] Heffernan, J. E., & Tawn, J. A. (2004). **A conditional approach for multivariate extreme values**. J. R. Statist. Soc. B(66), 497-546.
- [4] Mendes, B. V. M. (2004) **Introdução a análise de eventos extremos**, Rio de Janeiro, E-papers.
- [5] Nascimento, F. F. (2009) **Abordagem Bayesiana não-paramétrica para análise de valores extremos**. 170p. Tese (Doutorado em estatística) - Programa de Pós-Graduação em Estatística, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [6] Nascimento, F.F. (2012) **Modelos Probabilísticos para dados Extremos: Teoria e aplicações**. In: II COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORDESTE, 2012. Teresina, Piauí. Universidade Federal do Piauí.

- [7] Nascimento, F. F., Gamerman, D. e Lopes, H. F. (2012). **Semiparametric Bayesian approach to extreme estimation**. *Statistics and Computing*, 22, 661-675.
- [8] Silva, V. R.(2006) **Modelagem Condicional de Valores Extremos Multivariados: Uma Aplicação no Cálculo de Vazão de Rios em Porto Rico** 75p. Dissertação (Mestrado em estatística) - Programa de Pós-Graduação em Estatística, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.



Operadores multilineares são uniformemente contínuos sobre limitados

Geraldo Botelho¹, Luis A. Garcia²

^{1,2}Universidade Federal de Uberlândia, UFU, Brasil

Resumo

Neste trabalho provamos que operadores multilineares não nulos nunca são uniformemente contínuos e que operadores multilineares contínuos são sempre uniformemente contínuos sobre limitados. Como aplicação desse resultado, provamos um teorema de extensão ao fecho para operadores multilineares contínuos.

Palavras-chave: espaços normados, operadores multilineares, continuidade uniforme, extensão ao fecho.

Introdução

Um fato importante da Análise Funcional linear é que operadores lineares contínuos são sempre uniformemente contínuos. Este fato se perde no caso não linear, na verdade, mesmo no caso multilinear isso não ocorre: para todo $n \geq 2$, operadores n -lineares contínuos entre espaços de Banach nunca são uniformemente contínuos, exceto o operador nulo, é claro. Além de demonstrar este fato, neste trabalho mostraremos que os operadores multilineares contínuos satisfazem uma propriedade mais fraca, a saber, a continuidade uniforme sobre conjuntos limitados.

Normalmente se prova que operadores lineares contínuos podem ser estendidos continuamente ao fecho do espaço no qual estão definidos usando a continuidade uniforme destes operadores. Como não há continuidade uniforme para operadores multilineares contínuos, resta saber se estes podem ser estendidos continuamente ao fecho. Como aplicação da continuidade uniforme sobre limitados, provaremos que, assim como os operadores lineares, os operadores multilineares contínuos podem ser estendidos continuamente ao fecho e preservando a norma.

Dados os espaços normados reais ou complexos E_1, \dots, E_n, F , por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ denotamos o espaço dos operadores n -lineares contínuos de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F com a norma usual de operadores, isto é,

$$\|A\| = \sup\{\|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j, \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, n\}.$$

Para a teoria linear, nos referimos a [1] e para a teoria multilinear nos referimos a [3].

Resultados principais

Começamos mostrando que operadores multilineares não-nulos nunca são uniformemente contínuos. Isso demarca uma importante diferença entre os casos linear e não-linear da Análise Funcional.

Proposição 1. *Sejam $n \geq 2$, E_1, \dots, E_n, F espaços normados e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então A é uniformemente contínuo se e somente se $A = 0$.*

¹botelho@ufu.br

²Luis.santisteban@ufu.br

Definimos agora o conceito menos exigente anunciado na introdução.

Definição 2. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f: M \rightarrow N$ é *uniformemente contínua sobre limitados* se para todo $X \subseteq M$ limitado e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que pode depender de X e de ε , tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todos $x, y \in X$ com $d(x, y) < \delta$.

A seguir veremos que operadores multilineares contínuos são sempre uniformemente contínuo sobre limitados.

Teorema 3. Sejam E_1, \dots, E_n, F espaços normados e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então A é uniformemente contínuo sobre conjuntos limitados do conjunto $E_1 \times \dots \times E_n$.

Por fim, apresentamos a seguinte aplicação do Teorema ??, que mostra que, neste aspecto, os operadores multilineares, mesmo não sendo uniformemente contínuos, se comportam como os operadores lineares.

Teorema 4. Sejam E_1, \dots, E_n espaços normados, F espaço de Banach, G_1 subespaço de E_1, \dots, G_n subespaço de E_n . Se $A \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; F)$, então existe um único operador $\tilde{A} \in \mathcal{L}(\overline{G_1}, \dots, \overline{G_n}; F)$ que estende A , isto é, $\tilde{A}(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n)$ para todos $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$. Mais ainda, $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

O caso linear do teorema acima pode ser encontrado, por exemplo, em [2].

Referências Bibliográficas

- [1] G. BOTELHO; D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2a. Edição, 2015.
- [2] LOPES, WANDA APARECIDA, *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2009.
- [3] MUJICA, JORGE, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, 2010.

Sistemas Dinâmicos Lineares por Partes: Estabilidade Global

Mayara Duarte de Araujo Caldas¹, Ricardo Miranda Martins²

¹Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

²Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas dinâmicos suaves por partes, dando ênfase principalmente a classe de sistemas que são lineares em cada quadrante do plano \mathbb{R}^2 , mas não são diferenciáveis ou sequer contínuos nos eixos. Nosso objetivo é fornecer condições para que a origem seja um ponto singular de estabilidade global.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Convenção de Filippov, Regularização, Estabilidade Assintótica.

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos suaves por partes é um assunto que tem recebido muita atenção nos últimos anos. Isto se deve à sua forte relação com sistemas dinâmicos provenientes da engenharia, de modelos físicos e biológicos e também ao seu grande potencial matemático, dado que tais sistemas exibem propriedades bem distintas dos sistemas suaves. O resultado deste trabalho estabelece um meio de detectar estabilidade assintótica global para uma classe de campos vetoriais descontínuos, o que pode ser útil para aplicações nas áreas mencionadas.

Desenvolvimento

Nosso trabalho apresenta uma extensão da conjectura de Markus e Yamabe (1960) para nossa classe de sistemas, que diz que se um sistema diferenciável $x'(t) = F(x)$, com F de classe C^1 , for Hurwitz e a origem um ponto singular, então a origem é uma solução global assintoticamente estável.

Considere em \mathbb{R}^2 a variedade de descontinuidade como sendo $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Denotaremos por Q_i , onde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, cada quadrante do plano \mathbb{R}^2 . Seja X_i uma matriz 2×2 para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, de modo que X_i fornece um campo vetorial linear no quadrante Q_i . Definimos um campo vetorial descontínuo X em $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ como $X = X_i|_{Q_i}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Mostraremos que se X é um campo vetorial descontínuo Hurwitz em $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$, então a origem é globalmente assintoticamente estável. Para isso, precisamos fazer a extensão do campo em $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ para todo o plano \mathbb{R}^2 , o que será feito em duas etapas. Primeiramente, fazemos a extensão de $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ para $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ utilizando a Convenção de Filippov [1] e depois a extensão de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ para \mathbb{R}^2 utilizando a Regularização de Teixeira-Sotomayor [3]. Fazendo isso, conseguimos utilizar a conjectura de Markus e Yamabe para concluir nosso resultado.

Além disso, apresentaremos alguns exemplos onde o campo vetorial descontínuo X não é Hurwitz para observarmos o que acontece nesse caso.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Guardia, T. M. Seara and M. A. Teixeira, Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. Differential Equations*, 250, p. 1967 - 2023, 2011.
- [2] J. Llibre and M. A. Teixeira. Global asymptotic stability a class of discontinuous vector fields in \mathbb{R}^2 , *Dynamical Systems-an International Journal*, v. 22, p.133 - 146, 2017.
- [3] J. Sotomayor and M. A. Teixeira, Regularization of discontinuous vector fields, *Proceedings of Int. Conference on Differential Equations*, p. 207 - 223, 1998.

¹mayaraduartecaldas@gmail.com

²rmiranda@ime.unicamp.br

Teorema de Hadamard-Perron, Difeomorfismos de Anosov

Marcielis Espitia Noriega¹,

¹Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidad de Campinas, Brasil

Resumo

O principal objetivo desta apresentação é falar sobre os difeomorfismos de Anosov, definição, exemplos e propriedades interessantes tais como o fato de que todo difeomorfismo de Anosov no toro é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico no toro. Discutiremos também um tema muito importante nos sistemas dinâmicos que é a existência das variedades estável e instável a partir do teorema de Hadamard-Perron.

Palavras-chave: Difeomorfismo de Anosov, variedade estável, conjunto hiperbólico.

Introdução

A noção geral de um sistema dinâmico consiste em um espaço de fase X e uma regra $f : X \rightarrow X$, a tempo discreto ou contínuo, que relaciona seu estado presente com seu estado passado e futuro. A teoria dos Sistemas Dinâmicos busca descrever a evolução temporal das órbitas do sistema através da identificação de padrões e do seu comportamento assintótico. Nesta apresentação consideraremos sistemas dinâmicos $f : M \rightarrow M$ a tempo-discreto e com espaço de fase M sendo uma variedade diferenciável. Em diferentes trabalhos tem-se mostrado que propriedades genéricas e estáveis para um sistema dinâmico estão diretamente relacionadas com o comportamento hiperbólico do sistema. O conceito de hiperbolicidade produziu o desenvolvimento de uma teoria rica em definições e resultados extremamente interessantes. O teorema principal desta apresentação, o teorema da variedade estável- instável será apresentado em uma forma um pouco mais geral da que usaremos, pois a aplicação principal será no caso hiperbólico, mas fazemos a observação que no caso hiperbólico estas variedades são tão suaves como o mapa. A prova do teorema de Hadamard-Perron ilustra um método que desempenha o papel central na teoria dos sistemas dinâmicos hiperbólicos que é estabelecer o cenário para o uso temático do Princípio de Mapeamento de Contração em espaços funcionais apropriadamente construídos, além da construção de famílias de cones invariantes.

Desenvolvimento

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre uma classe muito importante de difeomorfismos chamada difeomorfismos de Anosov. Na primeira parte são introduzidos conceitos e resultados básicos de sistemas dinâmicos, assim como noções fundamentais de topologia diferencial tais como variedades diferenciáveis, espaços tangentes e variedades riemannianas. Depois estabelece-se a noção de hiperbolicidade e conseqüentemente define-se difeomorfismos de Anosov, em seguida, são apresentadas propriedades importantes destes sistemas, tais como estabilidade estrutural, onde será feita a demonstração do teorema de Hadamard-Perron, nesta demonstração faremos as observações das características das variedades estável e instável e dos seus respectivos espaços tangentes.

¹ra192955@ime.unicamp.br

Considerações Finais

A teoria dos difeomorfismos de Anosov, assim como o Teorema da Variedade Estável a é um dos resultados mais importantes na teoria dos sistemas dinâmicos hiperbólicos. Ele estabelece que o conjunto estável de um ponto em um conjunto hiperbólico é uma variedade diferenciável a qual é assintoticamente contraída pela dinâmica.

Referências Bibliográficas

- [1] Katok, A. and Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, (1995).
- [2] PALIS, J.; DE MELO, W, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An introduction*, Springer, Berlin, (1982).

Usando a Álgebra Geométrica Conforme para Determinar a Estrutura de Proteínas com Incertezas

M.S. Carielo¹, C. Lavor², L.A.F. Fernandes³

¹Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), UNICAMP, Campinas, SP

²Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), UNICAMP, Campinas, SP

³Instituto de Computação (IC), Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, RJ

Resumo

Um passo importante para se determinar a estrutura 3D de uma molécula de proteína é a interseção de esferas. Isso é parte do conhecido algoritmo *Branch-and-Prune* (BP), um método exato que encontra todas as soluções incongruentes do problema. Estudamos a interseção de esferas utilizando a Álgebra Geométrica Conforme (AGC) e formulamos a interseção intervalar entre esferas e cascas esféricas, usadas para modelar as incertezas presentes nos dados experimentais utilizados no problema. Apresentamos comparações entre a nova abordagem, baseada na AGC, e a abordagem clássica, baseada em álgebra linear.

Palavras-chave: Interseção de Esferas, Álgebra Geométrica Conforme, Geometria de Distâncias, Estruturas Moleculares

Introdução

Resumidamente, o problema consiste em determinar a estrutura 3D de uma proteína a partir de algumas distâncias conhecidas entre pares de átomos de uma molécula. Tais distâncias são provenientes de experimentos de ressonância magnética nuclear (RMN). Uma das hipóteses assumidas em abordagens convencionais é que todas distâncias disponíveis são precisas. Esta suposição implica em ser possível usar o método exato conhecido como algoritmo *Branch-and-Prune* (BP) [4] para encontrar todas as soluções. Sob certas condições, é possível discretizar o espaço de busca do problema e aplicar o algoritmo BP para resolver o Problema de Geometria de Distâncias Moleculares Discretizável (PGDMD) [4]. No entanto, distâncias estimadas por RMN têm erros de medida. Portanto, a incerteza deve ser considerada e as hipóteses devem ser revisadas para que possamos resolver esta nova versão do PGDMD.

Neste poster, nós usamos a Álgebra Geométrica Conforme (AGC) [3] para estudar a interseção de esferas no \mathbb{R}^n assumindo que os centros são linear (L.I.) ou afimamente independente (A.I.) [1] ou quaisquer [2]. Além disso, a interseção intervalar entre esferas e cascas esféricas [2] também foram estudadas e aplicadas ao problema de determinar a estrutura molecular de proteínas com incertezas.

Comparando a Abordagem Clássica e a via AGC

Para obter a interseção de m esferas no \mathbb{R}^n precisamos encontrar os pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2 = d_i^2, \quad (0.23)$$

onde \mathbf{a}_i e d_i denotam, respectivamente, o centro e raio da i -ésima esferas, para $i = 1, \dots, m$. Na abordagem clássica [1, 2], é mostrado que, após transladarmos os centros das esferas por $-\mathbf{a}_m$, é possível construir uma matriz cujas colunas são os centros e seu posto é $k \leq \min\{n, m-1\}$, i.e., são L.I., A.I. ou quaisquer. A constante k é a dimensão do invólucro afim do conjunto definido pelos m centros. Após o processo de linearização do sistema (0.23) descrito em [1, 2], a solução é: (i) vazia; (ii) um ponto; ou (iii) uma $(n-k)$ -esfera.

Na abordagem via AGC, escrevemos os centros das esferas como vetores $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_0 + \mathbf{a}_i + \frac{\|\mathbf{a}_i\|^2}{2} \mathbf{e}_\infty \in \mathbb{R}^{n+1,1}$ e consideramos a representação dual da i -ésima esfera (0.23) em $\mathbb{R}^{n+1,1}$ usando $\sigma_i = \mathbf{a}_i - \frac{d_i^2}{2} \mathbf{e}_\infty$. Após uma translação, sem perda de generalização, os k primeiros centros são L.I. Dessa maneira, a interseção pode ser feita através de

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k. \quad (0.24)$$

Isto é, $\bar{\sigma}$ em (0.24) é a representação dual de uma $(n-k)$ -esfera no \mathbb{R}^n . Em seguida, realizamos a interseção de $\bar{\sigma}$ com as últimas $m-k$ esferas,

$$\bar{\sigma}^{(r+1)} = \begin{cases} \bar{\sigma}^{(r)}, & \text{se } \bar{\sigma}^{(r)} \wedge \bar{\sigma}_{r+1} = 0, \\ \bar{\sigma}^{(r)} \wedge \bar{\sigma}_{r+1}, & \text{se } \bar{\sigma}^{(r)} \wedge \bar{\sigma}_{r+1} \neq 0, \end{cases} \quad (0.25)$$

¹mscarielo@gmail.com

²clavor@ime.unicamp.br

³laffernandes@ic.uff.br

onde $r = k, k+1, \dots, m-1$ e $\bar{\sigma}^{(k)} = \bar{\sigma}$. Logo, a solução é obtida usando (0.25), sendo dada por $\sigma = \bar{\sigma}^{(m)}$. Portanto, definindo $t = \sigma \cdot \bar{\sigma}$, a solução σ do problema é: (i) vazia, se $t < 0$; (ii) um ponto, se $t = 0$; ou (iii) uma $(n-k)$ -esfera, se $t > 0$. Aqui, $\bar{\sigma}$ denota o reverso de σ .

Acrescentando uma casca esférica

O efeito das incertezas nas medidas provenientes de experimentos de RMN podem ser representados por

$$\underline{d}_{m+1} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_{m+1}\| \leq \bar{d}_{m+1}. \quad (0.26)$$

Agora o problema é resolver um sistema não-linear (0.23) acoplado com uma desigualdade não-linear (0.26). Em [2], os autores encontram uma solução através de um método parecido com o do caso de esferas exatas.

Na abordagem com a AGC, acrescentamos uma casca esférica ao problema inicial, de forma que sua representação dual é definida por

$$\bar{\sigma}_d = a_{m+1} - \frac{d^2}{2} e_\infty, \quad (0.27)$$

onde $d \in U$ e $U = [\underline{d}_{m+1}, \bar{d}_{m+1}]$. Daí, para cada $d \in U$, através de $t_d = \sigma_d \cdot \bar{\sigma}_d$, a interseção $\sigma_d = \sigma \wedge \bar{\sigma}_d$ será, como no caso clássico, uma das seguintes possibilidades: (i) vazia, se $t_d < 0$; (ii) um ponto, se $t_d = 0$; ou (iii) uma $(n-k)$ -esfera ou a união de $(n-k-1)$ -esferas, se $t_d > 0$. Pela construção aqui usada, o sinal de t_d não muda no intervalo U . Portanto, precisamos checar o sinal de t_d para somente um $d \in U$.

Estudos em Andamento

O efeito de adicionar uma casca esférica ao problema inicial é o de restringir a solução a um subconjunto do resultado obtido da interseção de m esferas. Atualmente, investigamos o efeito de adicionar uma segunda casca esférica. Embora seja esperado uma generalização de forma natural independente da abordagem escolhida, neste novo problema surgem barreiras que ainda necessitam explicações mais realistas.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Coope, *Reliable computation of the points of intersection of n spheres in \mathbb{R}^n* , ANZIAM Journal, **42** (2000), 461-477.
- [2] D. Maioli, C. Lavor, D.S. Gonçalves, *A note on computing the intersection of spheres in \mathbb{R}^n* , ANZIAM Journal, **59** (2017), 271-279.
- [3] K. Kanatani *Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for computer vision and graphics*, CRC Press, Boca Raton, 2015.
- [4] L. Liberti, C. Lavor, N. Maculan, *A branch-and-prune algorithm for the molecular distance geometry problem*, International Transactions in Operational Research, **15** (2008), 1-17.
- [5] C. Lavor, L. Liberti, A. Mucherino, *The interval Branch-and-Prune algorithm for the discretizable molecular distance geometry problem with inexact distances*, Journal of Global Optimization, **56** (2013), 855-871.

